

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikálna fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCA



Bc. Veronika Janáková

Mníchovská metóda chain ladder

Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Martin Pleška

Študijný program: Finančná a poisťná matematika

2010

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať vedúcemu diplomovej práce Mgr. Martinovi Pleškovi za jeho trpezlivosť a cenné rady poskytnuté pri písaní práce. Ďalej by som sa chcela poďakovať Mgr. Kláre Karasovej za pripomienky, konzultácie a postrehy, ktoré mi vždy rada poskytla.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 7. decembra 2010

Veronika Janáková

Obsah

Úvod	6
1 Úvod k Mníchovskej metóde Chain Ladder	8
1.1 Základné metódy tvorby rezerv	13
1.2 SCL a (P/I) problém	19
1.2.1 Príklad	20
1.2.2 Systematická chyba SCL metódy	22
1.3 Korelácie medzi vzniknutými a vyplatenými škodami	25
1.3.1 Základná myšlienka riešenia (P/I) problému	25
1.4 Možné riešenie (P/I) problému: Mníchovský chain ladder	28
1.4.1 Prechod od (P/I) k (I/P) podielom	28
1.4.2 Prechod k reziduám: Mníchovská metóda chain ladder	30
2 Teoretické základy a formule	35
2.1 Chain ladder model predstavený Mackom	35
2.1.1 Značenie	35
2.1.2 Predpoklady modelu	37
2.2 Mníchovský chain ladder model	40
2.2.1 Predpoklady modelu	41
2.2.2 Analýza predpokladov modelu	43
3 Praktická implementácia a konkrétne príklady	46
3.1 Odhady parametrov	46
3.1.1 Parametre klasickej chain ladder metódy	46
3.1.2 Parametre MCL metódy	48
3.1.3 Odvodenie variability MCL modelu a aplikácia vo výpočte MSE	52
3.2 Špeciálne situácie	54
3.2.1 Nulové alebo veľmi nízke vyplatené škody	54

3.2.2	Vyhľadzovanie a extrapolácia v prípadoch, kedy je vývoj neukončený	55
3.3	Aplikácia výpočtu na konkrétne dáta	55
	Záver	64
	Literatúra	68

Názov práce: Mníchovská metoda chain ladder

Autor: Bc. Veronika Janáková

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Martin Pleška

e-mail vedúceho: martin.pleska@cz.pwc.com

Abstrakt: Poistovňa je povinná vytvárať technické rezervy na krytie rizík z poistovacej činnosti. V oblasti neživotného poistenia je jednou zo základných rezerv tzv. IBNR rezerva - rezerva na škody, ktoré už vznikli ale ešte neboli nahlásené poisťovní. Obsahom a základným cieľom predloženej práce je priblíženie metódy stanovovania odhadu rezervy IBNR - Mníchovskej Chain Ladder metódy. Mníchovská Chain Ladder metóda vznikla modifikáciou štandardnej Chain Ladder metódy - jednej z najpoužívanejších metód pre stanovenie odhadu IBNR rezervy. Práca sa zameriava na dôvody, ktoré viedli k modifikácii štandardného Chain Ladder výpočtu, vysvetľuje samotný výpočet modifikovanej metódy a v závere prezentuje i praktickú aplikáciu metódy na reálne dáta a porovnanie výsledku s klasickou, výpočetne jednoduchšou metódou Chain Ladder.

Kľúčové slová: IBNR rezerva, chain ladder, Mníchovský chain ladder

Title: Munich chain ladder method

Author: Bc. Veronika Janáková

Department: Department of probability and mathematical statistic

Supervisor: Mgr. Martin Pleška

Supervisor's e-mail address: martin.pleska@cz.pwc.com

Abstract: The insurance company is obliged to create technical reserves to cover the risk from insurance activities. One of the main reserves in non-life insurance is the IBNR reserve - the reserve to cover the damages that already exist, but that have not been reported to the insurance company yet. The content and the general aim of this thesis is to provide a better orientation in the method used in the estimation of the reserve IBNR - the Munich Chain Ladder Method. Munich Chain Ladder Method was created as a modification of the standard Chain Ladder calculation - one of the most used methods in the estimation of the IBNR reserve. The thesis focuses on the reasons that led to the modification of standard Chain Ladder calculation and explains the calculation of the modified method. It presents the application of the method on the real data as well as the comparison with the results of the classical and less complicated Chain Ladder method.

Keywords: IBNR reserve, chain ladder, Munich chain ladder

Úvod

Technické rezervy a ich výška predstavujú základný faktor k určovaniu úrovne solventnosti a ratingu poisťovne. Hodnoty vykazované jednotlivými poisťovňami podliehajú prísnej kontrole regulátora, ktorého v ČR predstavuje Česká národní banka. Preto je nastavenie správnej výšky technických rezerv jedným z kľúčových aspektov vedúcich k úspešnému a konkurencieschopnému postaveniu poisťovne na trhu.

V predloženej práci sa zameriame na oblasť neživotného poistenia, konkrétne na stanovovanie odhadu jednej zo základných technických rezerv - rezervy na poistné plnenia. Rezerva na poistné plnenia je ďalej členená na dve časti, rozdelené podľa druhov poistných udalostí, ktoré rezerva kryje. Obsahom práce bude predstavenie jedného z možných prístupov k výpočtu odhadu tzv. IBNR rezervy - rezervy určenej na krytie poistných udalostí vzniknutých do konca bežného účtovného obdobia, ale v tomto účtovnom období doposiaľ poisťovni nehlásených. Tento prístup je známy pod označením Mníchovský Chain Ladder.

Práca je rozčlenená do troch kapitol. Prvá kapitola uvádza do problematiky odhadu IBNR rezervy v neživotnom poistení. V úvodnej časti kapitoly popíšeme základné tzv. trojuholníkové schémy dát a vysvetlíme obecné princípy používané pri výpočte odhadu rezerv. V krátkosti priblížime základné metódy rezervovania a prejdeme k najčastejšie používanej metóde stanovenia odhadu IBNR rezervy - klasickej Chain Ladder metóde.

Ďalej vysvetlíme základný princíp výpočtu SCL metódy a jej aplikáciu na dva typy dát, na škody vzniknuté a škody vyplatené. V jednotlivých podkapitolách sa podrobnejšie zameriame na nedostatky metódy a pre lepšiu názornosť uvedieme i praktický príklad a grafické ukážky založené na použitých dátach. Na popísanom príklade ukážeme systematickú chybu tejto metódy - podrezervovanosť resp. nadrezervovanosť výsledných odhadov. Tento nedostatok je v ďalších častiach práce ukázaný i na obecných od-

vodeníach. Snaha o jeho odstránenie viedla k modifikácií klasického výpočtu známej ako Mníchovská metóda.

Na modifikovaný Mníchovský výpočet sa zameriame v druhej časti práce. Uvedieme predpoklady metódy a vysvetlíme princíp modifikovaného výpočtu odhadu rezervy. Základná úvaha Mníchovského modelu spočíva v predpoklade korelácie medzi vzniknutými a vyplatenými škodami a jej následnom využití vo výpočte IBNR rezervy. Cieľom tejto úvahy je eliminovať systematickú chybu detekovanú u SCL metódy. Výpočet sa však súčasne stáva zložitejším a časovo náročnejším.

Obsahom poslednej kapitoly je praktický výpočet. Ukážeme si odhady jednotlivých parametrov potrebných k výpočtu a popíšeme špecifické, neštandardné situácie a ich možné riešenie. Ďalej aplikujeme klasickú Chain Ladder metódu i Mníchovskú Chain Ladder metódu na reálne dáta a zhodnotíme jednotlivé výsledky odhadov rezerv. Porovnáme jednotlivé metódy, uvedieme upravené výpočty používané v praxi a doplníme i grafy a diagramy založené na použitých reálnych dátach.

Kapitola 1

Úvod k Mníchovskej metóde Chain Ladder

Poistenie je nástrojom krytia dôsledkov náhodných udalostí. V priebehu poistnej doby môžu nastať poistné udalosti, ktorých likvidácia môže trvať aj celé roky. V praxi sa takéto prípady vyskytujú najmä pri škodách na zdraví, ktoré sa nemusia prejavíť bezprostredne po poistnej udalosti, ale môžu sa objaviť až po značnom čase. Kompenzácia takýchto škôd je potom veľmi zdĺhavá a náročná. K plneniu uvedených záväzkov z poisťovacej alebo zaistovacej činnosti, ktoré sú pravdepodobné alebo isté, ale neistá je ich výška alebo okamih, ku ktorému vzniknú, je poisťovňa resp. zaistovňa povinná vytvárať technické rezervy¹. Zásady pre stanovenie výšky a pre investovanie prostriedkov týchto rezerv sú vymedzené zákonom. V stručnosti uvedieme legislatívny rámec, ktorý upravuje technické rezervy v neživotnom poistení v Českej Republike:

- zákon č. 277/2009 Zb., o poisťovníctve
- vyhláška č. 434/2009 Zb.
- zákon č. 39/2004 Zb.
- vyhláška č.303/2004 Zb.

¹paragraf 51 odstavce (1) zákona č. 277/2009 Zb.

V oblasti neživotného poistenia rozlišujeme nasledujúce základné typy technických rezerv:

- rezerva na nezaslúžené poistné
- rezerva na poistné plnenia
- rezerva na prémie a zľavy
- vyrovnávacia rezerva²
- rezerva poistného neživotných poistení
- rezerva na splnenie záväzkov z ručenia za záväzky Českej kancelárie poisťovníkov podľa zvláštného právneho predpisu
- iné rezervy

V ďalšom texte sa budeme venovať rezerve na poistné plnenia, ktorá je určená na krytie záväzkov z poistných udalostí:

1. hlásených do konca bežného účtovného obdobia, ale v tomto účtovnom období doposiaľ nezlikvidovaných (v anglickej terminológii je táto hodnota označovaná skratkou RBNS³)
2. vzniknutých do konca bežného účtovného obdobia, ale v tomto účtovnom období doposiaľ poisťovní nehlásených (pre túto časť rezervy sa vžilo označenie IBNR⁴)

Rezerva tiež môže zahŕňať predpokladané výdaje spojené s likvidáciou poistných udalostí a znižuje sa o predpokladanú výšku regresov⁵, na ktoré má poisťovňa v súvislosti s poistnými plneniami nárok.

Hodnota RBNS sa spravidla odhaduje pre jednotlivé poistné udalosti metódou kvalifikovaného odhadu, ktorý vykonáva príslušný likvidátor

²nepovažuje sa za technickú rezervu podľa Medzinárodných štandardov finančného výkazníctva (IFRS)

³Reported But Not Settled

⁴Incurred But Not Reported

⁵spoluúčasť poisteného

na základe známych faktov o poistnej udalosti s využitím svojich skúseností s likvidáciou škôd v danom odvetví.

Pri odhade výšky rezervy na poistné plnenia, konkrétne jej časti IBNR⁶ sa vychádza z podkladových údajov za minulé roky, ktoré sú sumarizované vo forme tzv. **vývojových trojuholníkov**. Pod týmto pojmom rozumieme trojuholníkové schémy, v ktorých sú hodnoty v jednom riadku vzťahnuté k jednotnému referenčnému obdobiu, v ktorom škody nastali a hodnoty v stĺpcoch predstavujú oneskorenie v nahlásení škody poisťovni resp. vo vyplatení danej škody poisťovňou. Ak uvažujeme **kumulatívny trojuholník**, hodnoty sa vzťahujú k celkovým škodám nahláseným resp. vyplateným do určitej doby od ich vzniku (kumulujú sa), v prípade **nekumulatívneho trojuholníka** sa jedná o škody nahlásené resp. vyplatené s presne daným oneskorením.

Tabuľka 1.1: Kumulatívny trojuholník

	0	1	...	s	...	$n-2$	$n-1$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$...	$X_{1,s}$...	$X_{1,n-2}$	$X_{1,n-1}$
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$...	$X_{2,s}$...	$X_{2,n-2}$	
\vdots	\vdots	\vdots					
$n-1$	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$					
n	$X_{n,0}$						

Uvažujme kumulatívny trojuholník ako je uvedený v tabuľke 1.1. Nech

$$X_{i,s}, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 0, \dots, n-1$$

predstavuje celkovú výšku škôd, ktoré vznikli v roku i a boli nahlásené do konca roku $i+s$. Je to teda súčet škôd, ktoré vznikli v roku i a v roku i boli hlásené až po škody, ktoré vznikli v roku i , ale hlásené boli až v roku $i+s$. Bežne sa i označuje ako "rok vzniku" a s ako "oneskorenie".

Nech ďalej

$$Y_{i,s}, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 0, \dots, n-1$$

⁶matematické modely, ktoré sa zaoberajú výpočtom IBNR sú podrobne uvedené napríklad v práci [5]

označuje nekumulatívnu hodnotu, ktorá predstavuje výšku škôd, ktoré vznikli v roku i a nahlásené boli v roku $i + s$, tj.

$$Y_{i,s} = \begin{cases} X_{i,s} & , i = 1, \dots, n, \quad s = 0 \\ X_{i,s} - X_{i,s-1} & , i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Zo zavedeného značenia a vysvetlených pojmov vyplýva nasledovný vzťah:

$$X_{i,s} = \sum_{t=0}^s Y_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 0, \dots, n-1.$$

Matematické metódy, ktorým sa budeme venovať v ďalšom texte slúžia k nájdeniu odhadu $\widehat{X}_{i,s}$, kde $i + s > n$, teda slúžia k doplneniu trojuholníka na štvorec. Najznámejšou poistne-matematickou metódou, ktorá slúži k odhadu hodnôt pod diagonálou (tj. doplnenie na štvorec) je metóda Chain Ladder.

Časť rezervy na poistné plnenia na konci posledného vývojového roku n pripadajúca na škody z roku i teda získame ako rozdiel

$$\widehat{X}_{i,n-1} - X_{i,n-i}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Hodnota $\widehat{X}_{i,n-1}$ predstavuje odhad celkovej výšky škôd pripadajúcej na udalosti vzniknuté v roku i , $i = 2, \dots, n$.

V praxi sa k doplnenému štvorcu často pridáva ešte jeden stĺpec - tzv. "ultimate claims". V takomto prípade výsledným tvarom doplneného trojuholníka nebude štvorec ale štvoruholník. Hodnoty v tomto stĺpci získame úpravou jednotlivých odhadovaných hodnôt $\widehat{X}_{i,n-1}$ pre $i = 2, \dots, n$, resp. hodnoty $X_{1,n-1}$ o tzv. "tail" faktor, ktorý zohľadňuje vývoj škôd v ďalších obdobiach od posledného známeho obdobia v trojuholníku až po súčasnosť. Účelom "tail" faktoru je teda zachytiť situáciu keď vývoj škôd ešte nie je ukončený. Stanovuje sa kvalifikovaným odhadom a takto upravené hodnoty sa zvyčajne označujú $\widehat{X}_{i,\infty}$.

V takomto prípade možno výraz (1.1) upraviť do tvaru, ktorý vyjadruje časť rezervy na poistné plnenia v súčasnosti⁷ pripadajúcej na škody z roku i .

$$\widehat{X}_{i,\infty} - X_{i,n-i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

⁷resp. v požadovanom budúcom čase

Niektoré metódy pracujú s nekumulatívnymi hodnotami $Y_{i,s}$. Typické je to hlavne pre metódy, ktoré berú do úvahy infláciu. My však v tejto práci s infláciou nebudeme pracovať.

Vyššie uvedenú trojuholníkovú metódu je možné aplikovať na rôzne kategórie dát. Najzákladnejšie využitie sa týka údajov o vyplatených škodách. Výsledkom je odhad budúcich výplat očakávaných poisťovňou. Na určenie rezervy IBNR je potrebné od takto odhadnutých potenciálnych výplat ešte odčítať aj hodnotu RBNS rezervy, ktorú už poisťovňa má vytvorenú. V niektorých prípadoch sa používajú nielen dáta o uskutočnených výplatách, ale aj dáta o rezervách RBNS (súčet výplat a RBNS rezerv v praxi označované aj ako tzv. „incurred dáta“), ktoré sa evidujú na škodách vzniknutých a už aj nahlásených poisťovni. Výsledkom v tomto prípade je už hodnota IBNR rezervy. Budeme teda uvažovať dva typy trojuholníkových schém:

1. Kumulatívny trojuholník vyplatených škôd (paid-loss triangle):

Tabuľka 1.2: Kumulatívny trojuholník vyplatených škôd

	0	1	...	s	...	$n-2$	$n-1$
1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$...	$P_{1,s}$...	$P_{1,n-2}$	$P_{1,n-1}$
2	$P_{2,0}$	$P_{2,1}$...	$P_{2,s}$...	$P_{2,n-2}$	
\vdots	\vdots	\vdots					
$n-1$	$P_{n-1,0}$	$P_{n-1,1}$					
n	$P_{n,0}$						

Hodnoty trojuholníka $P_{i,s}$, predstavujú kumulatívnu výšku vyplatených plnení pre rok vzniku i a oneskorenie s .

2. Kumulatívny trojuholník škôd vzniknutých (incurred-loss triangle):

Tabuľka 1.3: Kumulatívny trojuholník vzniknutých škôd

	0	1	...	s	...	n - 2	n - 1
1	$I_{1,0}$	$I_{1,1}$...	$I_{1,s}$...	$I_{1,n-2}$	$I_{1,n-1}$
2	$I_{2,0}$	$I_{2,1}$...	$I_{2,s}$...	$I_{2,n-2}$	
\vdots	\vdots	\vdots					
n - 1	$I_{n-1,0}$	$I_{n-1,1}$					
n	$I_{n,0}$						

Hodnoty analogicky označíme $I_{i,s}$ a budú predstavovať výšku kumulatívnych škôd vzniknutých v roku i a nahlásených do konca roku $i + s$.

V úvodnej podkapitole si uvedieme metódy odhadov rezerv založené na jednoduchých, časovo nenáročných princípoch výpočtu. Použitie týchto metód v praxi je však vzhľadom k jednoduchosti výpočtu veľmi obmedzené.

1.1 Základné metódy tvorby rezerv

V uvedených metódach budeme vychádzať z trojuholníkových schém zavedených v predchádzajúcej časti. Zameriame sa na schématický popis výpočtu a následne stručne zhodnotíme využitie konkrétnej metódy v praxi. Budeme vychádzať z práce [5].

1. SCL metóda

Pravdepodobne najznámejšou, najrozšírejšou i najpoužívanějšíou metódou stanovovania odhadov IBNR rezervy je Klasická Chain Ladder metóda označovaná ako SCL metóda.

Uvažujme kumulatívny trojuholník škôd definovaný v tabuľke 1.1. Nech index

$$m_i = n - i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

predstavuje posledné známe obdobie resp. čas súčasného vývojového stavu pre rok vzniku i . Potom hodnoty $X_{i,s}$ sú dané pre $0 \leq s \leq m_i$ a ich odhady $\widehat{X}_{i,s}$ pre $m_i < s \leq n-1$. Hodnoty X_{i,m_i} sú tak práve položky na diagonálach zodpovedajúcich štvorcov, teda súčasné kumulatívne hodnoty z jednotlivých nehodových rokov.

Základným predpokladom metódy, pomocou ktorého doplníme trojuholník na štvorec resp. štvoruholník je

$$\widehat{X}_{i,s+1} = \begin{cases} X_{i,s} \cdot f_{s \rightarrow s+1}, & s = m_i \\ \widehat{X}_{i,s} \cdot f_{s \rightarrow s+1}, & s > m_i, \end{cases} \quad (1.4)$$

kde výraz $f_{s \rightarrow s+1}$ predstavuje tzv. vývojový faktor definovaný ako

$$f_{s \rightarrow s+1} := \frac{\sum_{i=1}^{n-s-1} X_{i,s+1}}{\sum_{i=1}^{n-s-1} X_{i,s}}, \quad s = 0, \dots, n-2. \quad (1.5)$$

V praxi často dochádza k úprave vývojových faktorov $f_{s \rightarrow s+1}$ pre jednotlivé roky oneskorenia s , $s = 0, \dots, n-2$. Samotný výpočet uskutočňujú odborníci na danú oblasť - aktuári, ktorí hodnoty vývojových faktorov upravujú o "skúsenosť" v predchádzajúcich rokoch. Táto hodnota je odhadovaná na základe situácie na trhu s využitím odborných skúseností aktuárov. V praktickom modeli ktorý je prílohou práce je porovnaný "klasický" výpočet (bez úpravy vývojových faktorov) s výpočtom, ktorý zahŕňa i úpravu vývojových faktorov.

Trojuholník potom dopĺňame nasledovným spôsobom:

$$\widehat{X}_{i,n-1} = X_{i,m_i} \cdot f_{m_i \rightarrow m_i+1} \cdot f_{m_i+1 \rightarrow m_i+2} \cdot \dots \cdot f_{n-2 \rightarrow n-1}, \text{ kde } i = 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

Výsledný odhad celkovej výšky škôd $\widehat{X}_{i,n-1}$ z obdobia i možno v prípade neukončeného vývoja škôd upraviť na $\widehat{X}_{i,\infty}$ tak, ako bolo uvedené v úvodnej časti.

Odhad rezervy pre škody z obdobia i potom dostávame v tvare (1.1) resp. (1.2).

V praxi sa princíp SCL metódy často aplikuje na dva druhy dát súčasne, na dáta trojuholníka vyplatených škôd a dáta trojuholníka

škôd vzniknutých. Uvažujeme dva separátne výpočty, z čoho pochádza i anglické označenie SCL - Separate Chain Ladder.

Uvažujme teda kumulatívny trojuholník vyplatených škôd (tabuľka 1.2) a kumulatívny trojuholník škôd vzniknutých (tabuľka 1.3). Aplikáciou vyššie uvedeného základného princípu SCL metódy, formule 1.4 a formule 1.5 na dáta jednotlivých trojuholníkov, dostávame

$$\hat{P}_{i,s+1} = \begin{cases} P_{i,s} \cdot f_{s \rightarrow s+1}^P & s = m_i \\ \hat{P}_{i,s} \cdot f_{s \rightarrow s+1}^P & s > m_i, \end{cases} \quad (1.7)$$

kde vývojový faktor vyplatených škôd vyjadríme ako

$$f_{s \rightarrow s+1}^P := \frac{\sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s+1}}{\sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s}}, \quad s = 0, \dots, n-2. \quad (1.8)$$

a

$$\hat{I}_{i,s+1} = \begin{cases} I_{i,s} \cdot f_{s \rightarrow s+1}^I & s = m_i \\ \hat{I}_{i,s} \cdot f_{s \rightarrow s+1}^I & s > m_i, \end{cases} \quad (1.9)$$

kde vývojový faktor škôd vzniknutých má nasledovnú podobu

$$f_{s \rightarrow s+1}^I := \frac{\sum_{i=1}^{n-s-1} I_{i,s+1}}{\sum_{i=1}^{n-s-1} I_{i,s}}, \quad s = 0, \dots, n-2. \quad (1.10)$$

Jednotlivé trojuholníky potom dopĺňame analogicky s (1.6)

$$\hat{P}_{i,n-1} = P_{i,m_i} \cdot f_{m_i \rightarrow m_i+1}^P \cdot f_{m_i+1 \rightarrow m_i+2}^P \cdot \dots \cdot f_{n-2 \rightarrow n-1}^P, \quad \text{kde } i = 2, \dots, n \quad (1.11)$$

a

$$\hat{I}_{i,n-1} = I_{i,m_i} \cdot f_{m_i \rightarrow m_i+1}^I \cdot f_{m_i+1 \rightarrow m_i+2}^I \cdot \dots \cdot f_{n-2 \rightarrow n-1}^I, \quad \text{kde } i = 2, \dots, n. \quad (1.12)$$

Hodnotu IBNR rezervy pre rok vzniku i potom dostávame v tvare:

$$\widehat{I}_{i,\infty} - I_{i,n-i}, \quad \text{kde } i = 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

Princíp výpočtu SCL metódy je relatívne jednoduchý a časovo nenáročný. Môže ale dochádzať k tomu, že výsledné projekcie v trojuholníku vyplatených a vzniknutých škôd sa budú veľmi výrazne líšiť. Tento problém je najmarkantnejší v posledných rokoch vzniku, kedy odhad vychádza z krátkeho známeho vývoja. Myšlienka spojenia dvoch separátnych výpočtov do jedného s využitím vzájomných korelácií škôd vyplatených a škôd vzniknutých ponúka riešenie v podobe modifikácie SCL metódy navrhovanej pánmi Dr. Gerhard Quarg a Dr. Thomas Mack v práci [7]. Nová Mnichovská metóda (MCL) straty vyplatené (P) a straty vzniknuté (I) kombinuje využitím ich vzájomných podielov (P/I). Detailnejšie sa na MCL metódu zameriame v 2. kapitole práce.

2. Metóda škodného pomeru

Metóda škodného pomeru je základná metóda stanovenia odhadu rezervy. Jej reálne využitie je obmedzené na relatívne "malé" objemy dát. Pri aplikovaní tejto metódy na veľké portfólia sú výsledky tejto metódy takmer nepoužiteľné, vzhľadom k tomu, že vývoj portfólia nie je pri výpočte vôbec zohľadnený.

Pre účely tejto metódy stanovenia rezervy IBNR definujeme škodný pomer ako podiel celkových škôd vzniknutých v roku i na zaslúženom poistnom v roku i , tj.

$$SP_i := \frac{CP_i}{ZP_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.14)$$

kde SP_i značí škodný pomer v roku i , CP_i ⁸ celkové škody vzniknuté v roku i a ZP_i predstavuje zaslúžené poistné v roku i . Metóda spočíva v odhade celkových škôd vzniknutých v roku i :

$$\widehat{CP}_i = \widehat{SP}_i \cdot ZP_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

⁸s využitím značenia zavedeného v tabuľke 1.1 hodnota \widehat{CP}_i zodpovedá hodnote $\widehat{X}_{i,\infty}$, $i = 1, \dots, n$.

Rezervu pre rok i potom dostávame ako rozdiel odhadu celkových škôd vzniknutých v roku i a celkových doteraz uhradených škôd, tj. schématicky, analogicky vzťahu (1.1) možno písať:

$$\text{rezerva}_i = \widehat{CP}_i - (\text{škody z roku } i \text{ dosiaľ uhradené}). \quad (1.16)$$

Zobecnením tejto metódy dostaneme tzv. Bornhuetter-Fergusonovu metódu, ktorú v ďalšej časti predstavíme.

3. Bornhuetter-Fergusonova metóda

Sofistikovanejšou metódou stanovovania rezerv je Bornhuetter-Fergusonova metóda. Uvedieme základný princíp tejto metódy.

Uvažujme kumulatívny trojuholník definovaný v tabuľke 1.1. Označme podiely škôd vzniknutých v roku i nahlásených s oneskorením $s + 1$ a škôd vzniknutých v roku i a nahlásených s oneskorením s nasledovne:

$$g_{i,s} := \frac{X_{i,s+1}}{X_{i,s}}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad s = 0, \dots, n-2. \quad (1.17)$$

Takto napočítané hodnoty zobrazíme do trojuholníkovej schémy:

Tabuľka 1.4: Trojuholník podielov

	0	...	s	...	$n-3$	$n-2$
1	$g_{1,0}$...	$g_{1,s}$...	$g_{1,n-3}$	$g_{1,n-2}$
2	$g_{2,0}$...	$g_{2,s}$...	$g_{2,n-3}$	
\vdots	\vdots		\vdots			
i	$g_{i,0}$...	$g_{i,s}$			
\vdots	\vdots					
$n-1$	$g_{n-1,0}$					

Vytvorená trojuholníková schéma obsahuje podiely jednotlivých známych hodnôt trojuholníka z tabuľky 1.1. My však potrebujeme

trojuholník doplniť na štvorec, aby sme mohli stanoviť odhad rezervy. V tomto prípade nebudeme dopĺňať tabuľku 1.1, ale doplníme tabuľku 1.4. Hodnoty budeme dopĺňať po jednotlivých stĺpcoch a hodnoty doplnené do jedného stĺpca budú konštanty, tj. pre každý stĺpec napočítame jediná konštantnú hodnotu, ktorú potom doplníme na všetky chýbajúce miesta v danom stĺpci. Hodnotu danej konštanty pre stĺpec s tabuľky 1.4 spočítame nasledovne:

$$\hat{g}_s := \frac{\sum_{i=1}^{n-s-1} w_{i,s} \cdot g_{i,s}}{\sum_{i=1}^{n-s-1} w_{i,s}}, \quad s = 0, \dots, n-2. \quad (1.18)$$

Spočítaná konštantá predstavuje variantu vývojového faktora definovaného v (1.5). Hodnoty $w_{i,s}$ predstavujú váhy, ktorými násobíme jednotlivé hodnoty $g_{i,s}$. Ak za váhy $w_{i,s}$ zvolíme jednotlivé výšky škôd $X_{i,s}$, dostávame podobu vývojového faktoru klasickej chain ladder metódy uvedeného v (1.5). Ďalšou možnou voľbou pre $w_{i,s}$ je položiť $w_{i,s} = i + s$, kedy prikladáme vyššiu váhu novým rokom. Tabuľka 1.4 má po doplnení odhadnutých hodnôt nasledovnú podobu:

Tabuľka 1.5: Doplnenie trojuholníka na štvorec

	0	...	s	...	$n-3$	$n-2$
1	$g_{1,0}$...	$g_{1,s}$...	$g_{1,n-3}$	$g_{1,n-2}$
2	$g_{2,0}$...	$g_{2,s}$...	$g_{2,n-3}$	\hat{g}_{n-2}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
i	$g_{i,0}$...	$g_{i,s}$...	\hat{g}_{n-3}	\hat{g}_{n-2}
\vdots	\vdots					
$n-1$	$g_{n-1,0}$...	\hat{g}_s	...	\hat{g}_{n-3}	\hat{g}_{n-2}

Odhad celkovej škody z roku i potom dostávame v nasledovnom tvare:

$$\hat{X}_{i,\infty} = X_{i,n-j} \cdot \underbrace{\hat{g}_{n-i} \cdot \hat{g}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{g}_{n-2}}_{\hat{g}_{\infty}}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (1.19)$$

odkiaľ dostávame vzťah

$$X_{i,n-i} = \frac{\widehat{X}_{i,\infty}}{\widehat{g}_\infty}. \quad (1.20)$$

Rezerva na dosiaľ nevyplatené plnenie z roku i s využitím schémy (1.16) a (1.20) má tvar:

$$\widehat{CP}_i - \frac{\widehat{CP}_i}{\widehat{g}_\infty} = \widehat{CP}_i \cdot \left(1 - \frac{1}{\widehat{g}_\infty}\right) = \widehat{SP}_i \cdot ZP_i \cdot \left(1 - \frac{1}{\widehat{g}_\infty}\right), \quad (1.21)$$

kde \widehat{CP}_i predstavuje odhad celkového plnenia s využitím metódy škodného pomeru.

V ďalšej časti sa zameriame na vzájomné podiely (P/I) jednotlivých strát pri využití SCL metódy.

1.2 SCL a (P/I) problém

Nech n predstavuje rozmer trojuholníkov⁹ a nech $m_i = n - i$ je posledné známe obdobie pre rok vzniku i definované formulou (1.3). Zaved'me podiely vyplatených škôd na škodách vzniknutých pre rok vzniku i a oneskorenie t

$$(P/I)_{i,t} := \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}}, \text{ kde } i = 1, \dots, n, \quad t = 0, \dots, m_i. \quad (1.22)$$

Dalo by sa očakávať, že s rastúcim obdobím vývoja bude tento podiel konvergovať k 1. Empirické štúdie ale ukázali, že to neplatí pre predikcie vychádzajúce z SCL. V práci [7] však bolo ukázané, že tento problém je systematickou chybou SCL metódy.

⁹SCL i MCL fungujú jedine pre rovnaké dimenzie vzniku a vývoja

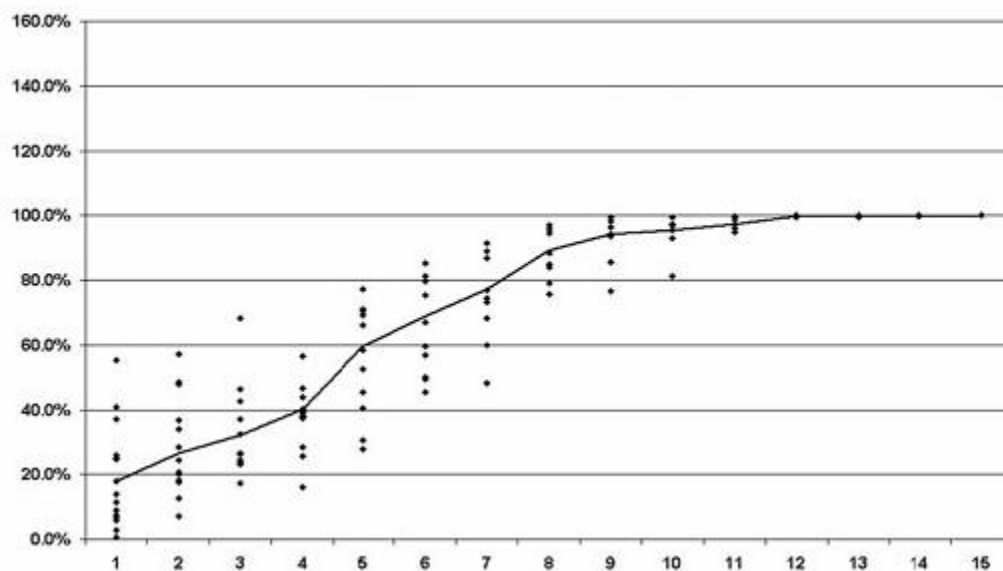
Na príklade ukážeme ako podiel (P/I) ovplyvňuje stupeň vzájomnej zhody medzi odhadmi vyplatených škôd spočítaných s využitím SCL metódy. Potom s pomocou explicitnej formuly ukážeme, že problémy, ktoré v príklade nastanú nie sú len výnimkou, ale systematickou chybou v SCL metóde.

V nasledujúcich príkladoch budeme využívať dáta z niekoľkých portfólií. Je potrebné si tento fakt uvedomiť najmä vzhľadom k vysvetľovaným efektom, ktoré nemožno pozorovať pri akýchkoľvek použitých dátach. Využijeme príklady uvedené v práci [7].

1.2.1 Príklad

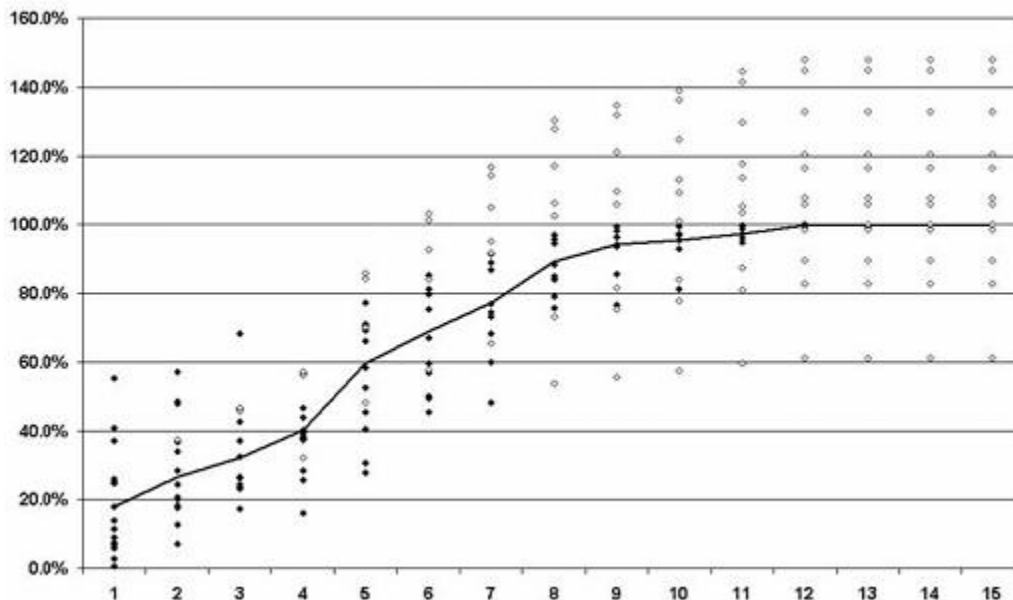
Uvažujme portfólio dát získaných z oblasti poistenia zodpovednosti za škodu spôsobenú prevádzkou motorového vozidla (POV). Trojuholníky škôd (vyplatených aj vzniknutých) obsahujú údaje z 15 nehodových rokov a z 15 vývojových rokov. Prvé štyri nehodové roky považujú autori [7] z praktických príčin za uzavreté, pretože záväzky, ktoré vznikli v tomto období sú z veľkej časti už uhradené.

Obrázok 1.1 zobrazuje hodnoty (P/I) podielov uvažovaného portfólia na osi y a vývojové roky na osi x . Súvislá krivka vyjadruje priemer (P/I) podielov z minulosti. Po 12 vývojových obdobiach hodnoty takmer dosahujú 100%. V rámci daného vývojového roku sa hodnoty pohybujú okolo daného priemeru. S rastúcim počtom vývojových rokov klesá rozptýlenosť zobrazovaných bodov grafu a tento pokles nie je výhradne zapríčinený znižujúcim sa počtom zobrazovaných bodov, ale vychádza z predpokladu o uzavretosti vývoja prvých 4 nehodových rokov, ako uvádzajú autori v [7].



Obrázok 1.1: (P/I) trojuholník

Obrázok 1.1 znázorňuje (P/I) podiely hodnôt, ktoré sú dané, tj. sú to hodnoty získané zo známych dát. Po odhadnutí hodnôt (v trojuholníku vyplatených i vzniknutých škôd) ležiacich pod diagonálou využitím SCL metódy je trojuholník doplnený na štvorec. Na obrázku 1.2 možno následne pozorovať i získané (P/I) podiely prislúchajúce odhadnutým hodnotám.



Obrázok 1.2: (P/I) podiely i s odhadnutými hodnotami spočítanými využitím SCL metódy

Konečné (P/I) podiely, tj. (P/I) podiely posledného vývojového roku kolíšu medzi 68% a 148%, čo znamená, že v niektorých nehodových rokoch odhady založené na vyplatených škodách dosahujú značne nižšie hodnoty než odhady založené na škodách vzniknutých, ale v iných nehodových rokoch ich naopak výrazne prekračujú. Ako je uvedené v práci [7], v dôsledku tak širokej škály rozptýlenia jednotlivých hodnôt (P/I) podielov nemožno výsledok tejto metódy považovať za vierohodný.

Nové, tj. odhadované body grafu vykazujú zásadne odlišné správanie, než hodnoty minulé. V najnovších obdobiach vzniku je dokonca možné pozorovať úplne divergujúce odhady. Zdá sa, že v prípade keď je súčasná hodnota (P/I) podielov nadpriemerná resp. podpriemerná bude tento trend ešte zosilnený v chain ladder odhadoch.

1.2.2 Systematická chyba SCL metódy

V predchádzajúcej časti sme uviedli, že charakteristickým problémom SCL metódy je podhodnotenie, resp. nadhodnotenie napočítaných odhadov škôd. V ďalšej časti sa na túto vlastnosť SCL metódy zameriame podrobnejšie.

Uvažujme trojuholníky vyplatených a vzniknutých škôd v danom portfóliu. Aplikujeme SCL metódu a doplníme trojuholníky na štvorce. Označíme $P_{i,t}$ a $I_{i,t}$ tak, ako boli zavedené v tabuľke 1.2 a v tabuľke 1.3. Budeme dodržiavať značenie konzistentné so značením používaným pri zavedení SCL metódy v časti 1.1, tj. $m_i = n - i$, $i = 1, \dots, n$ predstavuje čas súčasného vývojového stavu z i -teho roku, hodnoty $P_{i,t}$ a $I_{i,t}$ sú dané pre $0 \leq t \leq m_i$ a ich odhady $\widehat{P}_{i,t}$ a $\widehat{I}_{i,t}$ pre $m_i < t \leq n - 1$. Hodnoty P_{i,m_i} a I_{i,m_i} sú tak práve položky na diagonálach zodpovedajúcich štvorcov, teda súčasné kumulatívne hodnoty z jednotlivých nehodových rokov.

Zaveďme priemer (P/I) resp. odhad priemeru podielov všetkých vývojových rokov v čase t

$$\begin{aligned} (P/I)_t &:= \frac{\sum_{i=1}^n P_{i,t}}{\sum_{i=1}^n I_{i,t}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n I_{i,t}} \sum_{i=1}^n I_{i,t} (P/I)_{i,t}, \quad 0 \leq t \leq m_i \\ (\widehat{P/I})_t &:= \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{P}_{i,t}}{\sum_{i=1}^n \widehat{I}_{i,t}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \widehat{I}_{i,t}} \sum_{i=1}^n \widehat{I}_{i,t} (\widehat{P/I})_{i,t}, \quad m_i < t \leq n - 1, \end{aligned} \quad (1.23)$$

ktorý je rovný váženému priemeru jednotlivých (P/I) podielov (resp. ich odhadov) vo vývojovom roku t , kde váhy sú tvorené vzniknutými škodami (resp. ich odhadmi).

Nasledujúca formula vyjadruje odhady (P/I) podielov, tj. $t > m_i$:

$$(\widehat{P/I})_{i,t} = \frac{\widehat{P}_{i,t}}{\widehat{I}_{i,t}} = \frac{P_{i,m_i} \cdot f_{m_i \rightarrow m_i+1}^P \cdot \dots \cdot f_{t-1 \rightarrow t}^P}{I_{i,m_i} \cdot f_{m_i \rightarrow m_i+1}^I \cdot \dots \cdot f_{t-1 \rightarrow t}^I}. \quad (1.24)$$

Pre vývojové faktory vyplatených škôd upravujeme rovnicu

$$\begin{aligned} f_{s \rightarrow s+1}^P \cdot \sum_{i=1}^n P_{i,s} &= f_{s \rightarrow s+1}^P \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s} + \sum_{i=n-s}^n \widehat{P}_{i,s} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s+1}}{\sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s} + \sum_{i=n-s}^n f_{s \rightarrow s+1}^P \cdot \widehat{P}_{i,s} \\ &= \sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s+1} + \sum_{i=n-s}^n \widehat{P}_{i,s+1} \\ &= \sum_{i=1}^n P_{i,s+1}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Z tohto a z analogických výrazov pre vývojové faktory vzniknutých škôd dostávame vzťahy

$$f_{s \rightarrow s+1}^P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{i,s+1}}{\sum_{i=1}^n P_{i,s}} \quad \text{a} \quad f_{s \rightarrow s+1}^I = \frac{\sum_{i=1}^n I_{i,s+1}}{\sum_{i=1}^n I_{i,s}}. \quad (1.26)$$

Dosadením (1.26) do (1.24) dostávame:

$$(\widehat{P/I})_{i,t} = \frac{P_{i,m_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{P}_{j,t}}{\sum_{j=1}^n P_{j,m_i}}}{I_{i,m_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{I}_{j,t}}{\sum_{j=1}^n I_{j,m_i}}}. \quad (1.27)$$

Úpravou dostávame

$$(\widehat{P/I})_{i,t} = \frac{P_{i,m_i} \cdot \sum_{j=1}^n \widehat{P}_{j,t} \cdot \sum_{j=1}^n I_{j,m_i}}{I_{i,m_i} \cdot \sum_{j=1}^n \widehat{I}_{j,t} \cdot \sum_{j=1}^n P_{j,m_i}} = \frac{(P/I)_{i,m_i} \cdot (\widehat{P/I})_t}{(P/I)_{m_i}}. \quad (1.28)$$

Obdržíme nasledujúci výsledok pre $t > m_i$, ktorý je dôležitý pre naše ďalšie úvahy:

$$\frac{(\widehat{P/I})_{i,t}}{(\widehat{P/I})_t} = \frac{(P/I)_{i,m_i}}{(P/I)_{m_i}}. \quad (1.29)$$

Základnú myšlienku tejto rovnice možno vyjadriť takto:

Podiel (P/I) jednotlivých odhadovaných hodnôt k odpovedajúcemu priemeru je pre každý nehodový rok rovnaký ako podiel (P/I) súčasných hodnôt k odpovedajúcemu priemeru. Tento podiel teda zostáva konštantný v odhadoch založených na samostatných chain ladder výpočtoch.

Toto popisuje situáciu z Príkladu 1.2.1. Nehodový rok s nadpriemerným alebo podpriemerným súčasným (P/I) podielom bude mať tiež

nadpriemerný alebo podpriemerný odhadnutý podiel (P/I) vo vývojovom čase n .

Ak máme v portfóliu staré, uzavreté nehodové roky, (P/I) podiely sa v týchto prípadoch zvyšujú behom vývojového obdobia až takmer ku 100%. Krivky (P/I) podielov v súčasných rokoch odhadovaných s využitím SCL metódy však pri porovnaní s minulosťou 100% nedosahujú.

1.3 Korelácie medzi vzniknutými a vyplatenými škodami

Príklad a rovnica uvedená v predchádzajúcej sekcii ukazujú, že obvyklá metóda výpočtu s využitím dvoch chain ladder kalkulácií, jednej pre vyplatené škody a druhej pre škody vzniknuté, má systematickú chybu a preto nám opakovane poskytuje odhady, ktoré sú nadhodnotené resp. podhodnotené. Medzičasom uzavreté nehodové roky majú podpriemerné resp. nadpriemerné podiely (P/I), ale nakoniec hodnoty (P/I) podielov dosiahnu hodnoty okolo 100%. Tieto úvahy je možné zobecniť:

V minulosti relatívne nízka hodnota (P/I) podielu bola nasledovaná buď vysokým vývojovým faktorom pre vyplatené škody alebo relatívne nízkym vývojovým faktorom pre škody vzniknuté (alebo samozrejme oboje). Pre relatívne vysokú hodnotu podielu (P/I) je situácia opačná.

Podstatou (P/I) problémov pri využití SCL metódy je fakt, že tento spôsob výpočtu ignoruje koreláciu medzi vyplatenými a vzniknutými škodami.

1.3.1 Základná myšlienka riešenia (P/I) problému

Pri odhadovaní IBNR rezervy by sme nemali používať rovnaký priemerný chain ladder vývojový faktor pre všetky nehodové roky ako v prípade SCL metódy, ale upraviť jednotlivé vývojové faktory na základe aktuálneho (P/I) podielu ako je uvedené v práci [2].

V prípade, že podiel (P/I) je nízky, potom možno predpokladať:

- Úroveň vyplatených (už zlikvidovaných) škôd je nízka

- Možno očakávať urýchlenie likvidácie škôd v ďalších obdobiach
- Individuálny faktor $P_{i,s+1}/P_{i,s}$ je vyšší (nadpriemerný)
- Klasický faktor (podľa SCL) $f_{s \rightarrow s+1}^P$ by mal byť navýšený
- Medzi veličinami $(P/I)_{i,s}$ a $P_{i,s+1}/P_{i,s}$ existuje záporná korelácia

V prípade, že podiel (P/I) je naopak relatívne vysoký, možno predpokladať:

- Úroveň vzniknutých (už zarezervovaných) škôd je vysoká
- Dorezervovanie v ďalších obdobiach má nižšiu prioritu
- Individuálny faktor $I_{i,s+1}/I_{i,s}$ je nižší (podpriemerný)
- Klasický faktor (podľa SCL) $f_{s \rightarrow s+1}^I$ by sa mal znížiť
- Medzi veličinami $(P/I)_{i,s}$ a $I_{i,s+1}/I_{i,s}$ existuje kladná korelácia

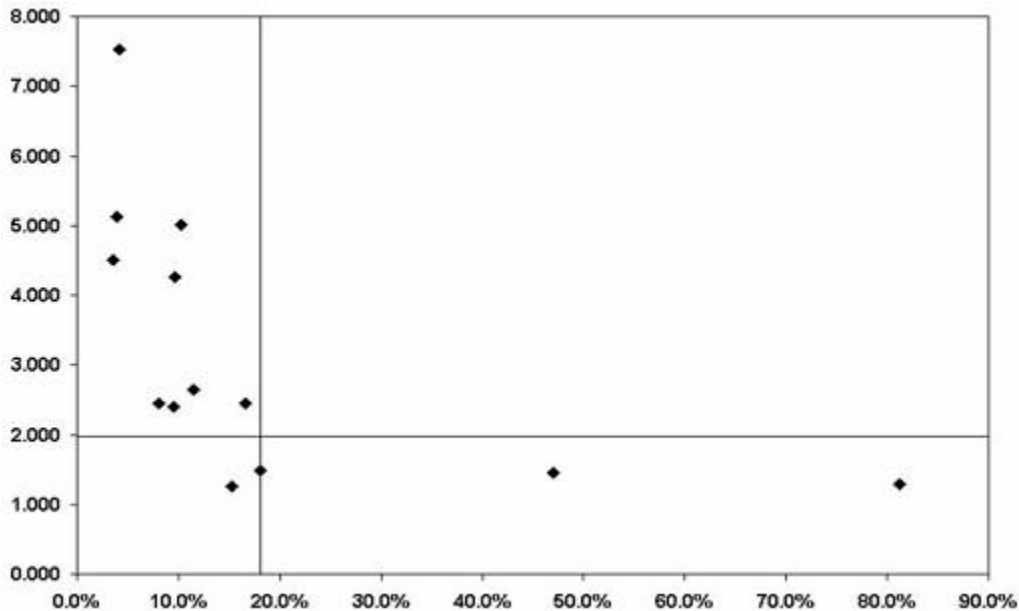
Tieto úvahy možno zobrať:

Ak je súčasný podiel plnení a záväzkov nízky, mali by sme použiť vyšší (nadpriemerný) vývojový faktor výplatených škôd a súčasne/alebo ak je naopak podiel (P/I) nízky, vývojový faktor škôd vzniknutých by mal byť nižší (podpriemerný).

Uvažujme modelový príklad, kde budeme aplikovať práve vysvetľované efekty. Uvažujme graf závislosti vývojových faktorov na (P/I) podieloch. Do grafu zakreslíme priemerný vývojový faktor a priemernú hodnotu (P/I) podielov horizontálnou a vertikálnou úsečkou, v tomto poradí. V grafe následne zakreslíme regresnú priamku prechádzajúcu cez priesečník dvoch úsečok vyjadrujúcich priemer a namiesto priemerného vývojového faktora na horizontálnej priamke využijeme hodnotu určenú regresnou priamkou v závislosti na podieli (P/I) . Tento postup aplikujeme na každý vývojový rok s (prechod od s k $s+1$). Takýmto spôsobom doplníme trojuholníky výplatených a vzniknutých škôd zľava doprava a vytvoríme štvorce. Využijeme pritom vývojové faktory, ktoré sa odchyľujú vo väčšej či menšej miere v závislosti na súčasnej hodnote podielu (P/I) .

Poznatky z praxe ukazujú, že tento prístup nie je presvedčivý a dáva nepravdepodobné výsledky:

1. Lineárny prístup je často nevhodný na modelovanie úrovne vyplatených vývojových faktorov. Toto je znázornené na nasledujúcom grafe, ktorý ukazuje vyplatené faktory $f_{i,1 \rightarrow 2}^P$ v závislosti na podieloch (P/I) v portfóliu s výrazne rozptýlenými (P/I) podielmi.



Obrázok 1.3: Vyplatené vývojové faktory pre výrazne rozptýlené (P/I) podiely

Hodnoty vyplatených vývojových faktorov, ktoré klesnú pod 1 sú netypické. V tomto prípade je regresná priamka nevhodná na modelovanie úrovne vývojových faktorov. V takejto situácii by bola vhodná hyperbolická krivka, ako naznačuje obrázok.

2. Odhad sklonu regresnej priamky je často veľmi nestály, špeciálne ak uvažujeme len niekoľko nehodových rokov. Tento problém často nastáva v posledných vývojových rokoch. Jeden obvyklý spôsob riešenia tohto problému, vyhladenie parametrov cez vývojové roky, je však ťažko aplikovateľný, pretože je obtiažne určiť smernice regresných priamok.
3. Odhady niekedy vykazujú relatívne strmé sklony regresných priamok i napriek tomu, že zobrazované body nejavia takmer žiadnu ko-

reláciu. V takomto prípade je závislosť vývojových faktorov a teda tiež finálneho odhadu vzhľadom k SCL metóde slabá.

1.4 Možné riešenie (P/I) problému: Mníchovský chain ladder

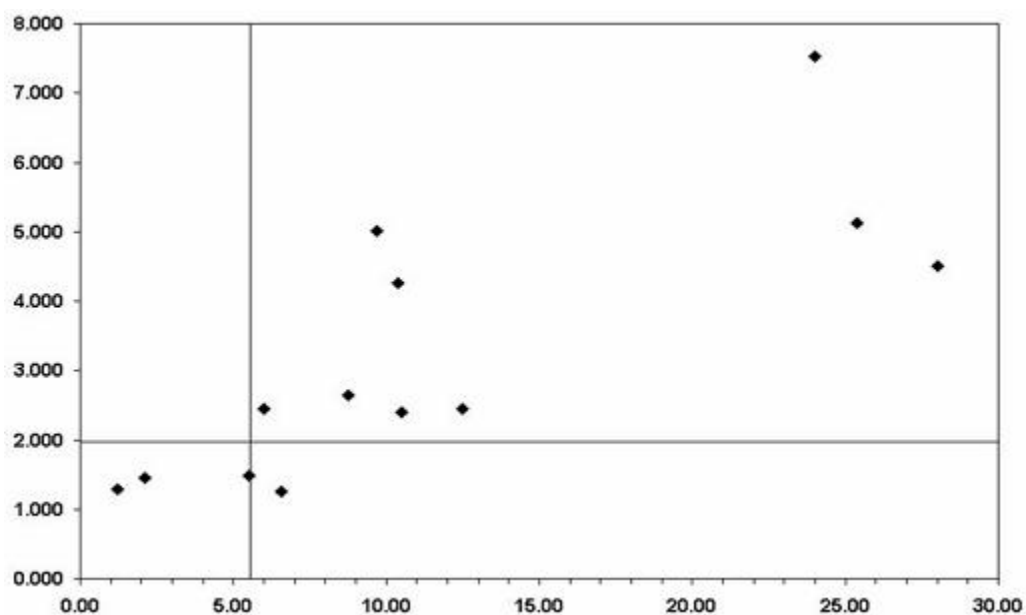
V ďalšej časti budeme prezentovať metódu, ktorá ponúkne riešenie vyššie diskutovaných problémov, ktoré si v krátkosti pripomenieme.

1. Lineárny prístup
2. Odhady sklonu regresnej priamky, predovšetkým v posledných vývojových rokoch
3. Odhady smernice regresnej priamky vykazujú strmé sklony i v prípadoch, že zobrazované body nevykazujú závislosť

Začneme s prvým problémom, modelovaním vývojových faktorov zaplattených škôd, potom prejdeme k ďalším dvom bodom.

1.4.1 Prechod od (P/I) k (I/P) podielom

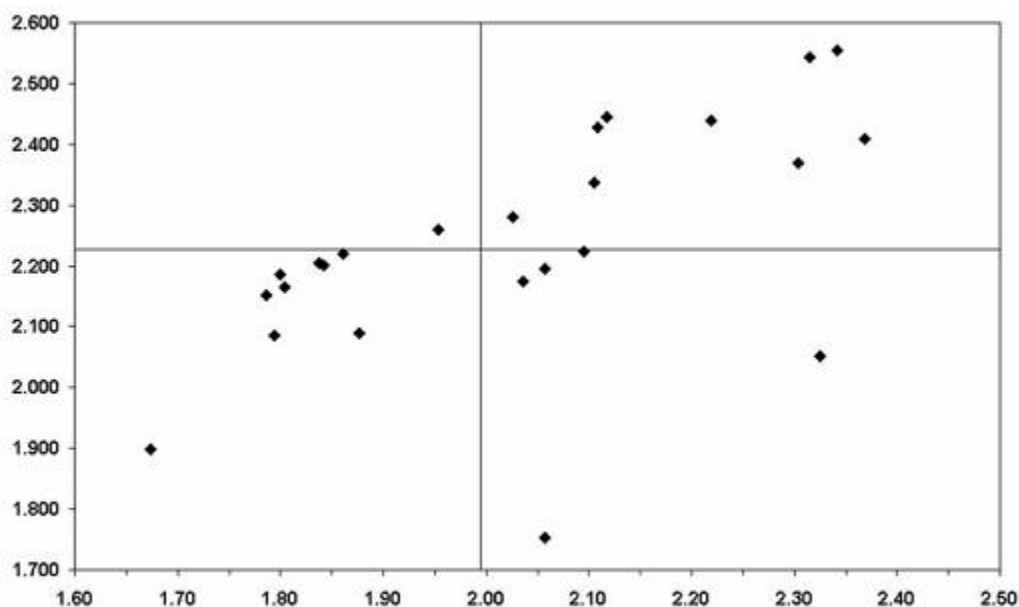
Budeme vychádzať z hyperbolickej podoby závislosti vyplatených vývojových faktorov na (P/I) podieloch na obrázku 1.3 a prejdeme k prevráteným hodnotám, k (I/P) podielom. Nasledujúci diagram ukazuje vyplatené vývojové faktory z obrázku 1.3, znázornené v závislosti na (I/P) podieloch po dvoch vývojových rokoch.



Obrázok 1.4: Závislosť vyplatených vývojových faktorov na (I/P) podieloch

V tomto prípade sa v porovnaní s obrázkom 1.3 lineárny prístup javí ako vhodný na modelovanie priemeru faktorov. V prípade, keď sú podiely (P/I) značne rozptýlené sme dosiahli lineárny efekt prechodom k prevráteným hodnotám.

V situácií, keď (P/I) podiely vykazovali relatívne malé rozptýlenie sa lineárny efekt zachoval aj po prechode k (I/P) podielom.



Obrázok 1.5: Závislosť vzniknutých vývojových faktorov na (I/P) podieloch

Tieto dva príklady ukazujú, že predpoklad lineárnej závislosti vyplatených vývojových faktorov na (I/P) podieloch má zmysel skôr, než na podieloch (P/I). Pre vzniknuté škody ale zostaneme pri pôvodnom predpoklade, že vývojové faktory majú lineárnu závislosť na (P/I) podieloch.

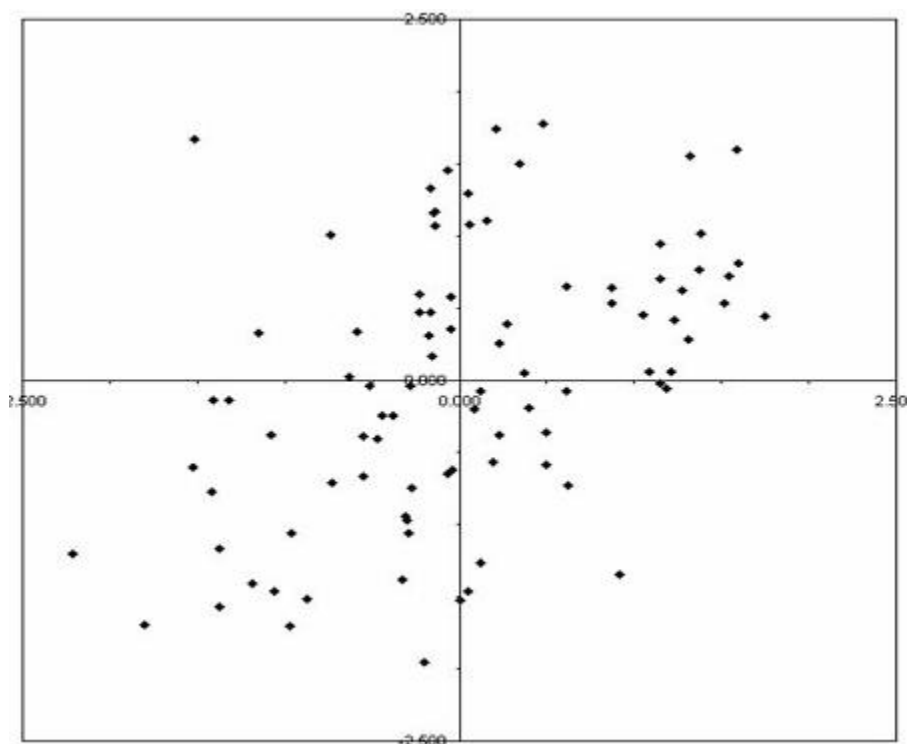
1.4.2 Prechod k reziduám: Mníchovská metóda chain ladder

Dôležitým krokom pri riešení druhého a tretieho problému, ktoré sú popísané v sekcii 1.3.1 je uvažovať vývojové roky ako celok, nie individuálne. Jednotlivé hodnoty teda združíme do postupností podľa roku vzniku škôd. Táto úvaha je však zrejmá, pretože podpriemerná resp. nadpriemerná hodnota (P/I) podielu musí byť kompenzovaná vhodným vývojovým faktorom nielen v okamžite nasledujúcom vývojovom roku, ale vo všetkých ostatných vývojových rokoch.

Vzhľadom k tomu, že individuálne vývojové faktory a podiely (P/I), resp. (I/P) všetkých vývojových rokov budeme uvažovať spolu (tj. vytvoríme postupnosti), je potrebné tieto hodnoty štandardizovať. Toto uskutočníme

prechodom k reziduám týchto hodnôt. K výpočtu reziduí budeme potrebovať predpoklady o strednej hodnote a rozptyle. Tie budeme formulovať až v nasledujúcej kapitole, kde uvedieme odvodenie a výpočty detailnejšie. Zatiaľ nám postačí fakt, že reziduum (vývojového faktoru, (P/I) podielu, resp. (I/P) podielu) je štandardizovaná miera odchýlky danej hodnoty od priemeru. Reziduum meria odchýlku od príslušnej strednej hodnoty v násobkoch smerodajnej odchýlky. Reziduá sú teda navzájom dobre porovnateľné hodnoty rozptýlené okolo nuly.

Závislosť vývojových faktorov na (I/P) a (P/I) podieloch, ktorá bola ukázaná v predchádzajúcich sekciách, chceme ukázať aj na iných dátach, ale namiesto hodnôt ako takých budeme pracovať s reziduami vyplatených vývojových faktorov v závislosti na reziduách (I/P) podielov, resp. s reziduami vzniknutých vývojových faktorov v závislosti na reziduách (P/I) podielov. Vzhľadom k štandardizácii, môžeme hodnoty zo všetkých vývojových rokov zakresliť do jediného grafu. Reziduá vyplatených vývojových faktorov vytvárajú graf, ktorý nazveme diagram vyplatených reziduí.

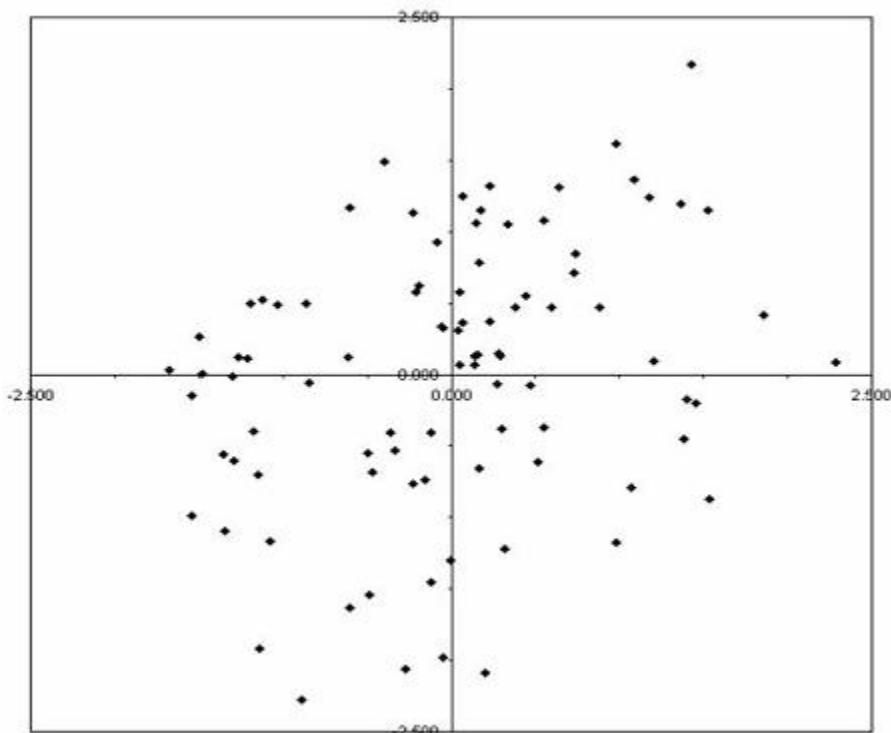


Obrázok 1.6: Diagram vyplatných reziduí

Bodový graf vykazuje rovnomerne rastúci trend len s niekoľkými vychýľujúcimi sa bodmi. Túto skutočnosť odráža aj hodnota korelačného koeficientu 45%. Smernica regresnej priamky prechádzajúcej počiatkom je 0,48.

Ak v danom nehodovom roku uvažujeme hodnotu rezidua súčasného (I/P) podielu napr. +1,00, na nasledujúci vývojový rok môžeme predpovedať hodnotu vyplatného vývojového faktora odpovedajúcu reziduu +0,48, vzhľadom na smernicu regresnej priamky. Klasický chain ladder výpočet využíva vývojový faktor s nulovou hodnotou rezidua.

Vzniknuté faktory vytvárajú analogický graf, ktorý nazveme diagram vzniknutých reziduí. I v tomto prípade bodový graf vykazuje rastúci trend. Korelačný koeficient je 29% a smernica regresnej priamky má hodnotu 0,31. Teda ak má reziduum (P/I) podielu hodnotu napr. +1,00, odhadovaný vzniknutý vývojový faktor na nasledujúci vývojový rok musí zodpovedať hodnote rezidua +0,31.



Obrázok 1.7: Diagram vzniknutých reziduí

Tento príklad vysvetľuje všeobecný postup. Najskôr zostrojíme oba grafy reziduí naraz pre všetky vývojové roky, reziduá vyplatených a vzniknutých vývojových faktorov na osi y v závislosti na reziduách (I/P) a (P/I) podielov na osi x . Potom v oboch grafoch zakreslíme regresnú priamku prechádzajúcu počiatkom. Pre daný (I/P) podiel (resp. (P/I) podiel), spočítame reziduum, vezmeme priradený vývojový faktor reziduí z príslušnej regresnej priamky a použijeme napočítané vývojové faktory namiesto priemerného vývojového faktoru (ktorý má reziduum 0). Tento postup uvedený v [7] je známy ako Mníchovská chain ladder metóda (MCL metóda).

Uvedený príklad nám dáva návod na metódu, ktorá je aplikovaná na väčšinu študovaných dát.

- vyplatené i vzniknuté vývojové faktory prispievajú k zhode vyplatených a vzniknutých škôd
- tento trend je zvyčajne viac markantný pri vyplatených škodách než pri škodách vzniknutých, je to ale dôležitý znak pre oba typy dát

V praxi existujú i ďalšie metódy. Napríklad v prípade, že korelácia v reziduálnych grafoch existuje len pre škody vyplatené alebo, ojedinele, len pre škody vzniknuté. V Mníchovskej metóde chain ladder sú tieto rozdiely automaticky brané v úvahu.

Zatiaľ sme uviedli základné princípy Mníchovskej metódy chain ladder a motiváciu, ktorá viedla k jej vzniku. Táto metóda výpočtu IBNR rezervy je však pomerne náročná a časovo zdĺhavá. Uvedieme si preto alternatívny spôsob využitia SCL metódy, ktorý zdanlivo eliminuje jej systematickú chybu. Ako bolo uvedené, hlavným nedostatkom SCL metódy je podrezervovanosť, resp. nadrezervovanosť napočítaných odhadov. Triviálne riešenie tohto problému nám môže ponúknuť nasledovná úvaha: V prípade, že odhady z dát trojuholníka vyplatených škôd sú nadrezervované a naopak odhady získané z dát trojuholníka vzniknutých škôd podrezervované (resp. naopak), spočítané odhadnuté hodnoty z jednotlivých trojuholníkov jednoducho spriemerujeme a dostaneme konečný odhad IBNR rezervy. Táto metóda výpočtu je jednoznačne rýchlejšia a jednoduchšia než pomerne zložitý princíp MCL metódy.

Popísaný princíp stanovenia IBNR rezervy sa v praxi skutočne využíva, poisťovne však jeho použitím podstupujú relatívne vysoké riziko, vzhľadom k tomu, že metóda nie je matematicky nijak podložená. Z toho dôvodu výpočet využívajú väčšinou poisťovne, ktoré majú veľmi rozsiahlu štatistickú základňu dát, ktorá v pomerne dlhom časovom horizonte vykazuje podobný trend. Tieto spoločnosti totiž majú empiricky overené, že takáto "alternatívna" metóda výpočtu na "ich" konkrétne dáta funguje. Obecne však nie je možné povedať, že použitím jednoduchej modifikácie SCL metódy odstránime jej systémovú chybu, zefektívňime odhady a súčasne zachováme rýchly a jednoduchý spôsob stanovenia IBNR rezervy. Odborné matematické štúdie a prepočty chybovosti a spoľahlivosti tejto metódy nie sú k dispozícii. Zostáva preto na uvažení samotných poisťovní, či voliť rizikový, súčasne však jednoduchý výpočet alebo relatívne spoľahlivý, matematicky podložený, súčasne však pomerne zložitý spôsob stanovenia odhadu IBNR rezervy.

Kapitola 2

Teoretické základy a formule

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli základné úvahy k Mníchovskej metóde chain ladder. Zamerali sme sa na matematické aspekty tejto metódy. Na tieto úvahy ďalej nadviažeme zavedením matematického modelu, MCL modelu, z ktorého budeme následne schopní odvodiť všetky potrebné vzťahy a odhady budúcich plnení, resp. rezerv.

MCL model je založený na zovšeobecnení modelu predstaveného Thomom Mackom v publikácii [7]. Je to model pre vyplatené a vzniknuté škody, ktorý pracuje so závislosťou vývojových faktorov na (P/I) (resp. (I/P)) podieloch¹, predstavených v minulej kapitole.

2.1 Chain ladder model predstavený Mackom

Zavedieme značenie a sformulujeme predpoklady chain ladder modelu.

2.1.1 Značenie

Nech T je vývojový čas, $T = 0, \dots, n-1$; $n \in \mathbf{N}$ je počet nehodových rokov. Pre $i = 1, \dots, n$, nech

¹v prípade vzniknutých vývojových faktorov uvažujeme závislosť na (P/I) podieloch, naopak pri vyplatených vývojových faktorov uvažujeme závislosť na (I/P) podieloch

$$P_i = \{P_{i,t}\}_{t \in T}$$

značí proces vyplatených škôd nehodového roku i a

$$I_i = \{I_{i,t}\}_{t \in T}$$

proces škôd vzniknutých. Potom náhodná premenná $P_{i,t}$ vyjadruje vyplatené škody za nehodový rok i po t vývojových rokoch. Procesy P_i a I_i popisujú vývoj vyplatených a vzniknutých škôd z nehodového roku i cez všetky vývojové roky. Procesy P_i a I_i sú tiež príkladom náhodnej postupnosti, ktorá je definovaná nasledovne²:

Nech (Ω, A, P) je pravdepodobnostný priestor, kde $\Omega \neq \emptyset$, A je σ - algebra podmnožín Ω ($A \subset 2^\Omega$), P je pravdepodobnostná miera na Ω ($P(\Omega) = 1$) a nech $T \subset \mathbf{R}$. Rodina reálnych náhodných veličín $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na (Ω, A, P) sa nazýva *náhodný proces*. V prípade, že $T = \mathbf{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ hovoríme o *náhodnej postupnosti*.

O náhodných postupnostiach P_i a I_i možno ďalej predpokladať, že sú *Markovove reťazce* tj. spĺňajú tzv. "*Markovskú vlastnosť*" definovanú nasledovne:

Hovoríme, že postupnosť náhodných veličín $\{X_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ sa nazýva *Markovov reťazec* s diskretným časom a množinou stavov S , ak

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad (2.1)$$

pre všetky $n = 0, 1, \dots$ a pre všetky $i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in S$ také, že $P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$. Obvykle $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Podmienku (2.1) nazývame *Markovská vlastnosť* (1. rádu).

Nech ďalej $P_i(s) := P_{i,1}, \dots, P_{i,s}$ vyjadruje podmienku, že vývoj vyplatených škôd nehodového roku i je známy do konca vývojového roku s , kde $s = 1, \dots, n$ a $I_i(s) := I_{i,1}, \dots, I_{i,s}$ analogicky zastáva podmienku, že vývoj vzniknutých škôd z nehodového roku i je daný až do času s vrátane.

²vychádzame z [6]

2.1.2 Predpoklady modelu

Predtým než uvedieme samotné predpoklady modelu, definujeme pojem nezávislosti, ktorý budeme v nasledujúcom texte využívať. Vychádzame z publikácie [1].

Nech (Ω, A, P) je pravdepodobnostný priestor. Javy $A_1, A_2 \in A$ sú *nezávislé* ak $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Pojem nezávislosti možno samozrejme rozšíriť i na náhodné veličiny nasledovným spôsobom:

Náhodné veličiny X_1, X_2, \dots , definované na rovnakom pravdepodobnostnom priestore sa nazývajú *nezávislé*, ak pre každé $n \in \mathbf{N}$ je

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$$

pre všetky $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, teda pokiaľ združená distribučná funkcia vektoru $(X_1, \dots, X_n)^\top$ je súčinom marginálnych distribučných funkcií jednotlivých veličín. Hovoríme, že postupnosť $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosťou nezávislých náhodných veličín resp. že je *nezávislá* ak pre všetky prirodzené n sú nezávislé náhodné veličiny (X_1, \dots, X_n) .

Predpoklady chain ladder modelu pre procesy vyplatených škôd sú nasledovné. Úpravy základných formúl sú uvedené v [3].

I.1 Predpoklad strednej hodnoty: Pre $s, t \in T$, kde $t = s + 1$ existuje vývojový faktor $f_{s \rightarrow t}^P > 0$ tak, že pre všetky $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right) = f_{s \rightarrow t}^P. \quad (2.2)$$

Predpoklad (2.2) je možné ďalej upraviť do tvaru:

$$\mathbf{E}(P_{i,t} \mid P_i(s)) = P_{i,s} \cdot f_{s \rightarrow t}^P. \quad (2.3)$$

I.2 Predpoklad rozptylu: Pre $s, t \in T$, kde $t = s + 1$ existuje proporcionálna konštanta $\sigma_{s \rightarrow t}^P \geq 0$ taká, že pre všetky $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{Var}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right) = \frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^P)^2}{P_{i,s}}. \quad (2.4)$$

Formulu (2.4) je opäť možné nasledovne upraviť:

$$\mathbf{Var}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right) = \frac{1}{P_{i,s}^2} \mathbf{Var}(P_{i,t} \mid P_i(s)) = \frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^P)^2}{P_{i,s}}. \quad (2.5)$$

Odkiaľ dostávame:

$$\mathbf{Var}(P_{i,t} \mid P_i(s)) = (\sigma_{s \rightarrow t}^P)^2 \cdot P_i(s). \quad (2.6)$$

I.3 Predpoklad nezávislosti: Jednotlivé nehodové roky sú vzájomne nezávislé, tj. náhodné postupnosti $\{P_{1,t} \mid t \in T\}, \dots, \{P_{n,t} \mid t \in T\}$ sú nezávislé.

Uvedieme analogické predpoklady pre procesy škôd vzniknutých:

II.1 Predpoklad strednej hodnoty: Pre $s, t \in T$, kde $t = s + 1$ existuje vývojový faktor $f_{s \rightarrow t}^I > 0$ tak, že pre všetky $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{E}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid I_i(s)\right) = f_{s \rightarrow t}^I. \quad (2.7)$$

Analogicky ako v (2.3) dostávame:

$$\mathbf{E}(I_{i,t} \mid I_i(s)) = I_{i,s} \cdot f_{s \rightarrow t}^I. \quad (2.8)$$

II.2 Predpoklad rozptylu: Pre $s, t \in T$, kde $t = s + 1$ existuje proporcionálna konštanta $\sigma_{s \rightarrow t}^I \geq 0$ taká, že pre všetky $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{Var}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid I_i(s)\right) = \frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^I)^2}{I_{i,s}}. \quad (2.9)$$

Opäť je možné rovnosť (2.9) upraviť:

$$\mathbf{Var}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid I_i(s)\right) = \frac{1}{I_{i,s}^2} \mathbf{Var}(I_{i,t} \mid I_i(s)) = \frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^I)^2}{I_{i,s}}. \quad (2.10)$$

A dostávame formulu:

$$\mathbf{Var}(I_{i,t} \mid I_i(s)) = (\sigma_{s \rightarrow t}^I)^2 \cdot I_i(s). \quad (2.11)$$

II.3 Predpoklad nezávislosti: Jednotlivé nehodové roky sú vzájomne nezávislé, tj. postupnosti $\{I_{1,t} \mid t \in T\}, \dots, \{I_{n,t} \mid t \in T\}$ sú nezávislé.

Predpoklady chain ladder modelu nám teda hovoria, že nehodové roky sú vzájomne nezávislé, ale vývojové faktory a parametry σ sa v každom vývojovom roku zhodujú.

Horeuvedené odhady sú tvorené pre projekcie v **jednom** trojuholníku, preto nehovoria nič o vzťahoch medzi procesmi vyplatených a vzniknutých škôd. Podmienená stredná hodnota popisuje najlepší spôsob odhadu $P_{i,t}$ ak poznáme len proces vyplatených škôd v nehodovom roku až do času s . Toto platí analogicky i pre procesy škôd vzniknutých. V praxi však poznáme oba trojuholníky a odhady chceme na tejto znalosti zakladať, takže budeme uvažovať nasledujúce podmienené stredné hodnoty

$$\mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid B_i(s)\right) \quad \text{a} \quad \mathbf{E}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid B_i(s)\right), \quad (2.12)$$

kde $B_i(s) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}, I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$ predstavuje znalosť vývoja **oboch** procesov až do konca vývojového roku s .

2.2 Mníchovský chain ladder model

Predtým, než prikróčime k odvodeniu potrebných formulí, uvedme ešte niekoľko doplňujúcich úvah a predpokladov.

Chceme rozšíriť predpoklad nezávislosti, teda namiesto dvoch samostatných predpokladov, predpokladu nezávislosti pre škody vzniknuté **I.3** a predpokladu nezávislosti pre škody vyplatené **II.3**, zavedieme jediný zobecnený predpoklad **III.3** tj. budeme predpokladať nezávislosť nehodových rokov cez vyplatené i vzniknuté škody. Daný predpoklad formálne znamená nezávislosť postupností $\{P_{1,t} \cdot I_{1,t} | t \in T\}, \dots, \{P_{n,t} \cdot I_{n,t} | t \in T\}$. Predpokladajme, že uvažované postupnosti realizácií náhodných veličín P_i a I_i sú tvorené kladnými hodnotami.

Nech ďalej

$$Q_i := \frac{P_i}{I_i} = \left\{ \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} \right\}_{t \in T} = \{Q_{i,t}\}_{t \in T}$$

predstavuje (P/I) proces.

Zavedme ďalej koncept podmieneného rezidua. Ak X je náhodná veličina, C je daná podmienka, označme

$$\sigma(X|C) := \sqrt{\mathbf{Var}(X|C)}$$

podmienenú smerodajnú odchýlku X pri danom C . Potom

$$\mathbf{Res}(X|C) := \frac{X - \mathbf{E}(X|C)}{\sigma(X|C)}, \quad \sigma(X|C) \neq 0$$

nazývame podmienené reziduum X pri danom C . Podmienené reziduum je štandardizované vzhľadom k svojej podmienenej strednej hodnote a k svojmu podmienenému rozptylu:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{Res}(X|C)|C) &= \mathbf{E}\left(\frac{X - \mathbf{E}(X|C)}{\sigma(X|C)} | C\right) \\ &= \frac{1}{\sigma(X|C)} [\mathbf{E}(X|C) - \mathbf{E}(X|C)] = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\text{Res}(X|C)|C) &= \text{Var}\left(\frac{X - \mathbf{E}(X|C)}{\sigma(X|C)}|C\right) \\
&= \frac{1}{\text{Var}(X|C)} [\text{Var}(X|C) - 2\text{Cov}(X, \mathbf{E}(X|C)|C) \\
&\quad + \text{Var}(\mathbf{E}(X|C)|C)] \\
&= \frac{1}{\text{Var}(X|C)} [\text{Var}(X|C) - 0 + 0] = 1 \quad (2.14)
\end{aligned}$$

2.2.1 Predpoklady modelu

V časti 2.1.2 sme uviedli, že nás zaujímajú podmienené stredné hodnoty pre vyplatené a vzniknuté vývojové faktory a ich reziduá

$$\mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|P_i(s)\right) \quad \text{a} \quad \mathbf{Res}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|I_i(s)\right),$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|P_i(s)\right)|B_i(s)\right) \quad \text{a} \quad \mathbf{E}\left(\mathbf{Res}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|I_i(s)\right)|B_i(s)\right).$$

Predpoklady uvedené v ďalšej časti nadväzujú na obecnú procedúru uvedenú pod obrázkami (1.6) a (1.7) a prevádzajú lineárnu závislosť týchto podmienených stredných hodnôt na reziduách (I/P) resp. (P/I) podielov

$$\mathbf{Res}(Q_{i,s}^{-1}|P_i(s)) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{Res}(Q_{i,s}|I_i(s))$$

do matematickej rovnice.

Použijeme značenie analogické označeniu predpokladov modelu z predchádzajúcej sekcie.

I.4 Existuje konštanta λ^P taká, že pre všetky $s, t \in T$, kde $t = s + 1$ a všetky $i = 1, \dots, n$ platí

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|P_i(s)\right)|B_i(s)\right) = \lambda^P \cdot \mathbf{Res}(Q_{i,s}^{-1}|P_i(s)). \quad (2.15)$$

Dosadením za reziduum dostávame

$$\mathbf{E}\left(\frac{\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right)}{\sigma\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right)} \mid B_i(s)\right) = \lambda^P \cdot \mathbf{Res}(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s)) \quad (2.16)$$

a následnou úpravou obdržíme

$$\frac{1}{\sigma\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right)} \cdot \left[\mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid B_i(s)\right) - \mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right) \right] = \lambda^P \cdot \left(\frac{Q_{i,s}^{-1} - \mathbf{E}(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s))}{\sigma(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s))} \right) \quad (2.17)$$

alebo ekvivalentne, s využitím (2.2)

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid B_i(s)\right) = f_{s \rightarrow t}^P + \lambda^P \cdot \frac{\sigma\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right)}{\sigma(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s))} \cdot (Q_{i,s}^{-1} - \mathbf{E}(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s)))}. \quad (2.18)$$

II.4 Existuje konštanta λ^I taká, že pre všetky $s, t \in T$, kde $t = s + 1$ a všetky $i = 1, \dots, n$ platí

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{Res}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid I_i(s)\right) \mid B_i(s)\right) = \lambda^I \cdot \mathbf{Res}(Q_{i,s} \mid I_i(s)). \quad (2.19)$$

Analogickou úpravou ako v prípade vyplatených škôd získame ekvivalentný zápis v tvare

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid B_i(s)\right) = f_{s \rightarrow t}^I + \lambda^I \cdot \frac{\sigma\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid I_i(s)\right)}{\sigma(Q_{i,s} \mid I_i(s))} \cdot (Q_{i,s} - \mathbf{E}(Q_{i,s} \mid I_i(s)))}. \quad (2.20)$$

Parametry λ^P a λ^I , ktoré predstavujú smernice regresnej priamky v príslušných reziduálnych grafoch, sú nezávislé na vývojovom roku s . Vo väčšine prípadov bude platiť $\lambda^P, \lambda^I \geq 0$ vzhľadom na úvahy uvedené v sekciách 1.3 a 1.4. Rovnice 2.18 a 2.20 vyjadrujú podmienené stredné hodnoty vývojových faktorov ako súčet štandardného chain ladder vývojového faktoru a korekčného výrazu, ktorý je funkciou oboch typov dát. Tento faktor budeme analyzovať v nasledujúcej časti.

MCL model teda pozostáva z nezávislého predpokladu **III.3** pre nehodové roky, zvyčajných chain ladder podmienok **I.1**, **I.2**, **II.1** a **II.2** pre vyplatené a vzniknuté straty a predpokladov **I.4** a **II.4**, ktoré popisujú závislosť vyplatených a vzniknutých vývojových faktorov na (I/P) a (P/I) podieloch, v tomto poradí.

2.2.2 Analýza predpokladov modelu

V tejto časti sa budeme bližšie zaoberať MCL modelom a rovnicami z **I.4** a **II.4**, kde budeme uvažovať prípad, že $\lambda^P, \lambda^I \geq 0$.

Podmienená stredná hodnota $\mathbf{E}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid B_i(s)\right)$, tj. vývojový faktor vzniknutých škôd používaný na predikciu škôd od času s do t v nehodovom roku i , je monotónne rastúca lineárna funkcia (P/I) podielu $Q_{i,s}$. Toto ukazuje, že pozorovania z praxe (viď sekcia 1.2) sme vyjadrili ako teoretické predpoklady. Teda rovnica 2.18 vyjadruje podmienenú strednú hodnotu ako súčet obvyklého chain ladder vývojového faktoru $f_{s \rightarrow t}^I$ a korekčného výrazu, ktorý je lineárny v $Q_{i,s}$. Tri zložky korekčného faktoru je možné interpretovať nasledovne:

- Faktor λ^I je bežný (tj. nezávislý na i i na s) korelačný koeficient reziduí vývojových faktorov a reziduí (P/I) podielov ako ukážeme nižšie. Preto budeme λ^I nazývať korelačný faktor alebo korelačný parameter. Hodnota λ^I je zvyčajne medzi 0 a 1 a meria závislosť vývojových faktorov na (P/I) podieloch. Ak v dátach nepozorujeme závislosť potom je $\lambda^I \approx 0$ a priemerné vývojové faktory sú odhadované ako v SCL metóde.
- Faktor smerodajnej odchýlky je podiel podmienených smerodajných odchýliek vzniknutých vývojových faktorov a súčasného (P/I) podielu. Spôsobuje výchylky (P/I) podielov od priemeru, ktoré možno

nazývať aj odchýlky od vývojových faktorov. Čím väčšia je smerodajná odchýlka vývojového faktoru, tým pravdepodobnejšia je značná odchýlka od priemeru a teda korekčný faktor sa tiež zväčšuje. Čím menšia je smerodajná odchýlka (P/I) podielu, tým netypickejšie budú značné odchýlky od priemeru a znovu sa bude hodnota korekčného faktoru zvyšovať.

- Lineárny člen $Q_{i,s} - \mathbf{E}(Q_{i,s} | I_i(s))$ obsahuje i odhady (P/I) podielu. Nadpriemerné hodnoty súčasných (P/I) podielov korigujú vývojové faktory smerom nahor, naopak podpriemerné hodnoty súčasných podielov ich korigujú smerom nadol. Čím viac sa bude súčasný (P/I) podiel posúvať od priemeru, tým väčšia bude hodnota korekčného faktoru. Ak je (P/I) podiel priemerný, použitý vývojový faktor bude tiež priemerný, ako pri využití SCL metódy.

Vyššie uvedené vzťahy pre vzniknuté vývojové faktory a (P/I) podiely možno samozrejme aplikovať i na vyplatené vývojové faktory a (I/P) podiely.

Korelačné parametre λ^P a λ^I predstavujú spojnicu medzi trojuholníkom vyplatených škôd a trojuholníkom škôd vzniknutých. Hodnota týchto parametrov indikuje mieru, ktorou je vývoj vyplatených a vzniknutých strát ovplyvnený, čo je dôvod prečo majú tieto parametre výrazný vplyv na výšku konečného odhadu. Reziduálny prístup nám umožnil uvažovať všetky vývojové roky spolu, tj. poskytol nám dostačujúce množstvo dát, ich odhad je relatívne stabilný. V tomto zmysle MCL metóda čeli druhému z troch problémov zo sekcie 1.3.1.

Ak označíme reziduá (I/P) a (P/I) podielov ako X a reziduá vývojových faktorov ako Y , z reziduálnych rovníc **I.4** a **II.4** dostávame vzťah

$$\mathbf{E}(Y | X) = \lambda \cdot X,$$

pre náhodné veličiny X a Y a skalár $\lambda \in \mathbf{R}$. Z tejto rovnice následne dostávame pre kovarianciu X a Y vzťah

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(X, \mathbf{E}(Y | X)) = \lambda \cdot \mathbf{Var}(X).$$

S využitím značenia $\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{Var}(X)}$ a $\sigma(Y) := \sqrt{\mathbf{Var}(Y)}$, obdržíme vzťah pre korelačný koeficient $\mathbf{Corr}(X, Y)$ náhodných veličín X a Y v tvare

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \lambda \cdot \frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}.$$

Kedže X a Y sú štandardizované, platí, že $\sigma(X) = \sigma(Y) = 1$, teda $\lambda = \mathbf{Corr}(X, Y)$. Dostávame teda, že λ parametry MCL modelu a korelačné koeficienty zodpovedajúcich reziduí sa navzájom rovnajú.

$$\mathbf{Corr}\left(\mathbf{Res}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s)), \mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | P_i(s)\right)\right) = \lambda^P$$

a

$$\mathbf{Corr}\left(\mathbf{Res}(Q_{i,s} | I_i(s)), \mathbf{Res}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | I_i(s)\right)\right) = \lambda^I.$$

Analogické výpočty vedú k nasledovným formulám pre podmienené korelačné koeficienty

$$\mathbf{Corr}\left(Q_{i,s}^{-1}, \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | P_i(s)\right) = \lambda^P$$

a

$$\mathbf{Corr}\left(Q_{i,s}^{-1}, \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | I_i(s)\right) = \lambda^I,$$

kde nepoužívame reziduálne výrazy.

Uvedený postup popisuje mechanizmus, ktorý rieši tretí problém v sekcii 1.3.1: slabé korelácie vo vyplatенých a/alebo vzniknutých reziduálnych grafoch poskytujú malé λ^P a/alebo λ^I , MCL projekcie sa teda len málo odchyľujú od bežných chain ladder výpočtov pre vyplatенé a/alebo vzniknuté škody.

Kapitola 3

Praktická implementácia a konkrétne príklady

V tejto kapitole najskôr uvidíme detailný popis všetkých odhadov parametrov potrebných pre MCL metódu a predtým než ukážeme kompletnú MCL kalkuláciu na konkrétnom príklade popíšeme problémy, s ktorými je možné sa stretnúť v praxi.

3.1 Odhady parametrov

Vo výpočte reziduí a vývojových faktorov budeme využívať odhady jednotlivých parametrov MCL modelu i klasickej SCL metódy, ktoré v nasledujúcich sekciách uvidíme. Nech znovu $t = s + 1$.

3.1.1 Parametre klasickej chain ladder metódy

Pre vývojový faktor $f_{s \rightarrow t}$ pre $s = 0, \dots, n - 2$, použijeme obvyklý chain ladder odhad, analogický ako v (1.5)

$$\widehat{f_{s \rightarrow t}} := \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s-1} X_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s-1} X_{i,s} \cdot \frac{X_{i,t}}{X_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s-1} X_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s-1} X_{i,s}}. \quad (3.1)$$

V ďalšom texte však budeme opäť rozlišovať vývojové faktory škôd vzniknutých $f_{s \rightarrow t}^I$ a škôd vyplatených $f_{s \rightarrow t}^P$. Ich odhady - analogické s (1.8) a resp. s (1.10) získame prostým dosadením do obecného vzťahu (3.1) pre $s = 0, \dots, n-2$ a aplikovaním na správne dáta buď trojuholníka vyplatených škôd alebo trojuholníka škôd vzniknutých.

$$\widehat{f_{s \rightarrow t}^P} := \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s} \cdot \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s}}$$

a

$$\widehat{f_{s \rightarrow t}^I} := \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s-1} I_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s-1} I_{i,s} \cdot \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s-1} I_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s-1} I_{i,s}}.$$

Pre $s = 0, \dots, n-3$ dostávame odhady smerodajnej odchýlky σ v obecnom tvare

$$(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}})^2 := \frac{1}{n-s-2} \cdot \sum_{i=1}^{n-s-1} X_{i,s} \cdot \left(\frac{X_{i,t}}{X_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow t}} \right)^2. \quad (3.2)$$

V prípade, že uvažujeme vzniknuté a vyplatené škody separátne, dostávame nasledovné vzťahy pre $s = 0, \dots, n-3$

$$(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P})^2 := \frac{1}{n-s-2} \cdot \sum_{i=1}^{n-s-1} P_{i,s} \cdot \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow t}^P} \right)^2$$

a

$$(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^I})^2 := \frac{1}{n-s-2} \cdot \sum_{i=1}^{n-s-1} I_{i,s} \cdot \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow t}^I} \right)^2,$$

kde $\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P} := \sqrt{(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P})^2}$ a $\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^I} := \sqrt{(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^I})^2}$.

Uvedieme ešte formulu pre strednú kvadratickú chybu (MSE - Mean Square Error) odhadu rezervy v chain ladder metóde ako mieru neistoty obsiahnutej v dátach. Podrobné odvodenie výsledného vzťahu je uvedené v [4]. MSE možno považovať za vhodný porovnávací ukazovateľ, či sú výsledky jednej metódy v porovnaní s inou metódou dôveryhodné alebo nie.

$$\widehat{mse}(\widehat{R}_i) = \widehat{X}_{i,n-1}^2 \sum_{s=n-i}^{n-2} \frac{(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}})^2}{(\widehat{f_{s \rightarrow t}})^2} \left(\frac{1}{\widehat{X}_{i,s}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s-1} X_{j,s}} \right) \quad (3.3)$$

kde \widehat{R}_i predstavuje odhad rezervy pre vývojový rok i tj. označenie výrazu (1.1).

3.1.2 Parametre MCL metódy

Aby sme mohli spočítať podmienené reziduá (P/I) a (I/P) podielov, potrebujeme odhady podmienených stredných hodnôt $\widehat{\mathbf{E}}(Q_{i,s} | I_i(s))$ a $\widehat{\mathbf{E}}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$ a podmienených smerodajných odchýliek $\widehat{\sigma}(Q_{i,s} | I_i(s))$ a $\widehat{\sigma}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$.

Zobecnením podmienky **II.1** z chain ladder modelu pre vzniknuté škody sa dostávame k úvahám, že $\mathbf{E}(Q_{i,s} | I_i(s))$ je konštantná. Z podmienky **II.2** nám analogickým spôsobom vyplýva záporná korelácia podmieneného rozptylu (P/I) podielu na rozsahu vzniknutých škôd, tj. so zvyšujúcim sa počtom škôd, rozptyl (P/I) podielu klesá. Pre $s = 0, \dots, n-1$ teda dostávame odhad

$$\widehat{\mathbf{E}}(Q_{i,s} | I_i(s)) := \widehat{q}_s = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s} \cdot Q_{j,s} = \frac{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}}{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s}}$$

ktorý je konštantný pre všetky nehodové roky. Pre

$$\begin{aligned} \sigma(Q_{i,s} | I_i(s)) &= \sqrt{\mathbf{Var}(Q_{i,s} | I_i(s))} = \sqrt{\mathbf{E}(Q_{i,s} - \mathbf{E}(Q_{i,s} | I_i(s)))^2} \\ &= \sqrt{\mathbf{E}(Q_{i,s}^2 | I_i(s)) - \mathbf{E}(Q_{i,s} | I_i(s))^2} \end{aligned}$$

dostávame odhad

$$\widehat{\sigma}(Q_{i,s} | I_i(s)) = \frac{\widehat{\rho_s^I}}{\sqrt{I_{i,s}}},$$

kde $\widehat{\rho_s^I}$ je definované ako

$$\widehat{\rho_s^I}^2 = \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s} \cdot (Q_{j,s} - \widehat{q_s})^2 \quad (3.4)$$

pre $s = 0, \dots, n-2$. Z vyjadrenia (3.4) je zrejmé, že $\widehat{\rho_s^I}$ je nezávislé na nehodovom roku i .

Tieto úvahy pre (P/I) podiely možno analogicky aplikovať na podmienené stredné hodnoty a rozptyly (I/P) podielov, kde v súlade so špecifickými podmienkami, vyplatené škody predstavujú mieru počtu škôd. Analogicky dostávame odhad

$$\widehat{q_s^{-1}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s} \cdot Q_{j,s}^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s}}{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}}$$

pre $\mathbf{E}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$ a

$$\frac{\widehat{\rho_s^P}}{\sqrt{P_{i,s}}}$$

pre $\sigma(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$, kde $\widehat{\rho_s^P}^2$ je definované ako

$$\widehat{\rho_s^P}^2 = \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s} \cdot (Q_{j,s}^{-1} - \widehat{q_s^{-1}})^2. \quad (3.5)$$

Vychádzame z predpokladu, že obe podmienené stredné hodnoty $\mathbf{E}(Q_{i,s} | I_i(s))$ a $\mathbf{E}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$ sú konštantné. Táto podmienka však implikuje, že i $Q_{i,s}$ nadobúda konštantné hodnoty, čo je v rozpore s realitou. Z toho dôvodu nie je možné uvažovať uvedené predpoklady. Musíme uvažovať zložitejšiu štruktúru závislosti podmienených stredných hodnôt na $I_i(s)$ a $P_i(s)$.

Pri spracovaní vhodných dát je možné odhadnúť $\mathbf{E}(Q_{i,s} | I_i(s))$ priemerovaním cez (P/I) podiely $Q_{j,s}$ tých vývojových rokov, pre ktoré je $I_j(s)$

zhodné alebo podobné¹ s $I_i(s)$. Ak sa v danom nehodovom roku $I_j(s)$ výrazne odlišuje od $I_i(s)$, je vhodné hodnoty daného vývojového roku nebrať v úvahu a vylúčiť ich z výpočtu. Tieto úvahy si vyžadujú analogický prístup k odhadu $\mathbf{E}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$. Daný postup nám umožňuje odhadovať podmienené stredné hodnoty, ktoré sú individuálne pre každý nehodový rok. Aplikácia popísaného postupu však bude veľmi záležať na získaných dátach, môže sa dokonca stať, že využiteľnosť bude obmedzená na prvé vývojové roky rozsiahleho trojuholníka.

Pre podmienené smerodajné odchýlky je situácia obdobná. Pri vhodných dátach je možné uvažovať štruktúru závislosti podmienených rozptylov $Q_{i,s}$ a $Q_{i,s}^{-1}$ na $I_i(s)$ a $P_i(s)$.

Pre zrozumiteľnosť a jednoduchosť nasledujúceho výkladu sa budeme držať horeuvedených (hrubých) odhadov. To je však možné len dovtedy, kým sú $\mathbf{E}(Q_{i,s} | I_i(s))$ a $\mathbf{E}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s))$ skutočne nekonštantnými funkciami $I_i(s)$ a $P_i(s)$.

Teraz sme už vzhľadom k vyššie uvedeným úvahám schopní odhadnúť podmienené reziduá. Odhady

$$\mathbf{Res}(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | P_i(s)) , \quad \mathbf{Res}(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | I_i(s)) , \quad \mathbf{Res}(Q_{i,s}^{-1} | P_i(s)) , \quad \mathbf{Res}(Q_{i,s} | I_i(s))$$

získané popísaným spôsobom označíme ako

$$\widehat{\mathbf{Res}}(P_{i,t}), \quad \widehat{\mathbf{Res}}(I_{i,t}) , \quad \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1}), \quad \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}), \quad \text{v tomto poradí.}$$

Dostávame teda

$$\widehat{\mathbf{Res}}(P_{i,t}) = \frac{\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow t}^P}}{\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P}} \cdot \sqrt{P_{i,s}}, \quad \widehat{\mathbf{Res}}(I_{i,t}) = \frac{\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow t}^I}}{\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^I}} \cdot \sqrt{I_{i,s}}$$

a

$$\widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1}) = \frac{Q_{i,s}^{-1} - \widehat{q_s}^{-1}}{\widehat{\rho_s^P}} \cdot \sqrt{P_{i,s}}, \quad \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}) = \frac{Q_{i,s} - \widehat{q_s}}{\widehat{\rho_s^I}} \cdot \sqrt{I_{i,s}}.$$

Pre korelačné koeficienty λ^P a λ^I použijeme odhady minimalizujúce strednú kvadratickú odchýlku súradníc y bodov reziduálneho grafu od regresnej priamky prechádzajúcej počiatkom so smernicou λ^P alebo λ^I :

¹Termínom "podobné" je v tomto kontexte chápané, že hodnota $I_{j,s}$ by mala byť blízka hodnote $I_{i,s}$ alebo individuálny vývojový faktor $\frac{I_{j,s}}{I_{j,s-1}}$ je blízky $\frac{I_{i,s}}{I_{i,s-1}}$.

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda^P} &:= \frac{1}{\sum_{s=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-s-1} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2} \cdot \sum_{s=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-s-1} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2 \cdot \frac{\widehat{\mathbf{Res}}(P_{i,t})}{\widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})} = \\ &= \frac{\sum_{s=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-s-1} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1}) \cdot \widehat{\mathbf{Res}}(P_{i,t})}{\sum_{s=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-s-1} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda^I} &:= \frac{1}{\sum_{s=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-s-1} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})^2} \cdot \sum_{s=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-s-1} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})^2 \cdot \frac{\widehat{\mathbf{Res}}(I_{i,t})}{\widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})} = \\ &= \frac{\sum_{s=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-s-1} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}) \cdot \widehat{\mathbf{Res}}(I_{i,t})}{\sum_{s=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-s-1} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})^2}.\end{aligned}$$

V prípade, že sa vývoj v trojuholníku uzavrie po menej ako n rokoch, index s bude nadobúdať hodnoty len do konca roku, v ktorom sa vývoj uzavrie.

Zafixovaním vývojového roku s v odhadoch pre λ^P a λ^I a sčítaním len cez i získame odhady pre λ parametre. Hodnoty λ parametrov môžu pre jednotlivé vývojové roky náhodne kolísať a vykazovať nejasné trendy, v dôsledku čoho by mohlo dôjsť k narušeniu predpokladov MCL modelu. Takáto situácia často nastáva v praxi. Fluktuácia v týchto číslach taktiež poukazuje na volatilitu odhadov pre jednotlivé vývojové roky. Pri zvážení uvedených argumentov sa zdá byť vhodným riešením prechod k výpočtu, ktorý uvažuje všetky vývojové roky ako celok ako v prípade reziduálneho prístupu k MCL metóde.

Vzhľadom k predpokladom **I.4** a **II.4**, nakoniec dostávame rekurzívne formule

$$\widehat{P_{i,t}} := \widehat{P_{i,s}} \cdot \left(\widehat{f_{s \rightarrow t}^P} + \widehat{\lambda^P} \cdot \frac{\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P}}{\widehat{\rho_s^P}} \cdot \left(\frac{\widehat{I_{i,s}}}{\widehat{P_{i,s}}} - \widehat{q_s}^{-1} \right) \right) \quad (3.6)$$

a

$$\widehat{I_{i,t}} := \widehat{I_{i,s}} \cdot \left(\widehat{f_{s \rightarrow t}^I} + \widehat{\lambda^I} \cdot \frac{\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^I}}{\widehat{\rho_s^I}} \cdot \left(\frac{\widehat{P_{i,s}}}{\widehat{I_{i,s}}} - \widehat{q_s} \right) \right) \quad (3.7)$$

pre $s \geq n-i$ s počiatočnými hodnotami $\widehat{P_{i,s}} := P_{i,s}$ a $\widehat{I_{i,s}} := I_{i,s}$ pre $s = n-i$.

3.1.3 Odvodenie variability MCL modelu a aplikácia vo výpočte MSE

Na rozdiel od SCL modelu, MCL model predstavený v článku [7] neuvádza variability výsledných odhadov. V nasledujúcej sekcii si preto vzťahy pre variabilitu MCL modelu odvodíme a následne spočítané odhady využijeme vo výpočte strednej kvadratickej chyby MCL modelu. Budeme vychádzať z lineárneho regresného modelu z práce [1].

Uvažujme regresný model s regresnou funkciou, ktorá je lineárnou kombináciou parametrov modelu:

$$Y_i = x_{i,1}\beta_1 + \dots + x_{i,k}\beta_k + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

tj. zapísané maticovo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

kde $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ je vektor vysvetľovaných pozorovaní, $\mathbf{X} = (x_{ij})$ regresná matica typu $n \times k$, $k < n$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ je vektor neznámych parametrov a $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^\top$ je chybový vektor, pre ktorý platí

$\mathbf{E}\epsilon = 0$ a $\mathbf{Var}\epsilon = \sigma^2\mathbf{I}$, kde \mathbf{I} predstavuje jednotkový vektor a σ^2 označuje rozptyl zložiek vektoru ϵ .

V popísanom regresnom modeli odhadneme parameter β metódou najmenších štvorcov. Odhad parametru β označíme $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)^\top$ a dostávame formulu

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)^{-1}\mathbf{X}\mathbf{Y}.$$

K odvodeniu variability využijeme nasledovný vzťah

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{X}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)^{-1}\mathbf{X}\mathbf{Y}.$$

Ďalej platí

$$\mathbf{Var}(\widehat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{X}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)^{-1}\mathbf{X} \mathbf{Var}(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{X}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)^{-1}\mathbf{X}. \quad (3.8)$$

Uvedený regresný model aplikujeme na podkladovú regresiu MCL modelu:

$$\mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right) \mid B_i(s) = \lambda^P \cdot \mathbf{Res}\left(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s)\right) + \epsilon_{i,s}. \quad (3.9)$$

Analógiou variability vysvetľujúcej premennej, tj. vzťahu (3.8) dostávame vzťah:

$$\mathbf{Var}\left(\mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right) \mid B_i(s)\right) = (\sigma_{s \rightarrow t}^P)^2 \cdot \frac{\mathbf{Res}^2(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s))}{\sum_i \sum_s \mathbf{Res}^2(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s))}. \quad (3.10)$$

Zjednodušením ľavej strany s využitím vzťahu 2.4 dostávame:

$$\mathbf{Var}\left(\mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid P_i(s)\right) \mid B_i(s)\right) = \frac{\mathbf{Var}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid B_i(s)\right)}{\frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^P)^2}{P_{i,s}}}. \quad (3.11)$$

Kombináciou ľavej strany a variability z podkladovej regresie dostávame finálny vzťah pre variabilitu vyplatených škôd:

$$\mathbf{Var}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid B_i(s)\right) = \mathbf{Var}(\hat{\lambda}^P) \cdot \frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^P)^2}{P_{i,s}} \cdot \mathbf{Res}^2(Q_{i,s}^{-1} \mid P_i(s)). \quad (3.12)$$

Analogicky dostávame i variabilitu pre vzniknuté škody:

$$\mathbf{Var}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid B_i(s)\right) = \mathbf{Var}(\hat{\lambda}^I) \cdot \frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^I)^2}{P_{i,s}} \cdot \mathbf{Res}^2(Q_{i,s} \mid P_i(s)). \quad (3.13)$$

Dosadením práve odvodených vzťahov pre variabilitu MCL modelu do formule 3.14 pre SCL model dostávame formulu pre MSE i pre MCL výpočet v tvare:

$$\widehat{mse}(R_i) = \widehat{X}_{i,n-1}^2 \sum_{s=n-i}^{n-2} \frac{(\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^{MCL})^2}{(\widehat{f}_{s \rightarrow t}^{MCL})^2} \left(\frac{1}{\widehat{X}_{i,s}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s-1} X_{j,s}} \right), \quad (3.14)$$

kde $\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^{MCL}$ predstavuje variabilitu MCL modelu (3.12) resp. (3.13) a $(\widehat{f}_{s \rightarrow t}^{MCL})$ predstavuje vyjadrenie (2.18) resp. (2.20).

3.2 Špeciálne situácie

3.2.1 Nulové alebo veľmi nízke vyplatené škody

V prípade, že pre dané portfólio sú v prvých vývojových rokoch kumulatívne vyplatené škody nízke, (štandardný) chain ladder výpočet založený na trojuholníku vyplatených škôd mnohokrát poskytuje relatívne nepoužiteľné prognózy pre budúce vývojové roky. Ich úroveň výrazne závisia na fluktuáciách v súčasných vyplatených hodnotách a IBNR rezerva sa často zdá byť veľmi nízka. V prípadoch, kedy neboli vyplatené žiadne škody, chain ladder metóda obvykle poskytne absurdnú nulovú prognózu pre hodnoty vyplatených škôd i na nasledujúce obdobia.

Tento problém v MCL metóde neexistuje v prípade, že aspoň vzniknutá strata alebo korelačný koeficient vyplatených škôd sú normálne rozdelené. Túto úvahu vhodne demonštruje rekurzívna formula pre projekciu vyplatených strát z predchádzajúcej sekcie.

$$\begin{aligned}\widehat{P}_{i,t} &= \widehat{P}_{i,s} \cdot \left(\widehat{f_{s \rightarrow t}^P} + \widehat{\lambda^P} \cdot \frac{\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P}}{\widehat{\rho_s^P}} \cdot \left(\frac{\widehat{I_{i,s}}}{\widehat{P_{i,s}}} - \widehat{q_s}^{-1} \right) \right) \\ &= \widehat{I_{i,s}} \cdot \widehat{\lambda^P} \cdot \frac{\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P}}{\widehat{\rho_s^P}} + \widehat{P_{i,s}} \cdot \left(\widehat{f_{s \rightarrow t}^P} - \widehat{\lambda^P} \cdot \frac{\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P}}{\widehat{\rho_s^P}} \cdot \widehat{q_s}^{-1} \right)\end{aligned}$$

Toto vyjadrenie ukazuje, že hodnota predikovaná pre $P_{i,t}$ je silne ovplyvnená odhadom $I_{i,s}$ a čiastočne i odhadom $P_{i,s}$, za podmienky, že hodnota vyplateného odhadu je nízka. Jeho hodnota však úplne nezmizne, keď je aktuálna hodnota $P_{i,n-i}$ nulová.

Ak je súčasná kumulatívna hodnota vyplatených škôd extrémne nízka alebo dokonca nulová, hodnota vyplatených škôd predikovaná MCL metódou závisí primárne na súčasnej hodnote škôd vzniknutých. V praxi, za podmienky, že vzniknuté škody sú normálne rozdelené veličiny, MCL odhady získané pre konečné hodnoty vyplatených škôd sú pomerne realistické. V tomto prípade výška vyplatených škôd nezohráva žiadnu úlohu, na rozdiel od jej vplyvu v SCL metóde.

3.2.2 Vyhľadzovanie a extrapolácia v prípadoch, kedy je vývoj neukončený

V situáciách, kedy je vývoj v skorých nehodových rokoch stále neukončený nastáva niekoľko problémov.

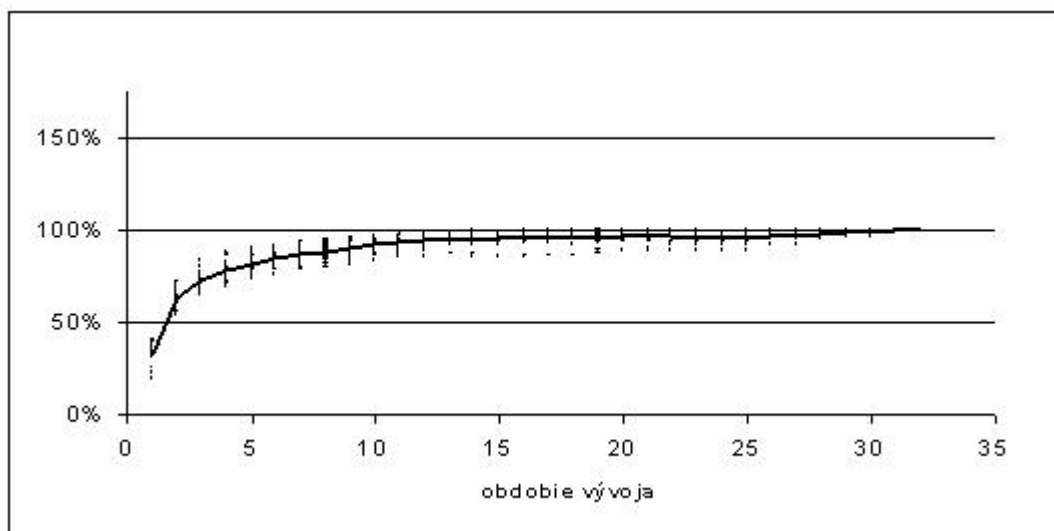
- Pre posledné vývojové roky používame slabú dátovú základňu pre odhadovanie niekoľkých parametrov, konkrétne vývojových faktorov, (P/I) podielov a parametrov rozptylu. Podobné problémy však nastávajú i v trojuholníkoch, kedy je vývoj ukončený. V týchto prípadoch majú parametre naviac slabý vplyv na finálny výsledok.
- Ak vývoj nie je ukončený pred posledným vývojovým rokom trojuholníka, zvyčajne sa použijú tzv. "tail" faktory. "Tail" faktory zohľadňujú vývoj škôd v období od času posledných známych hodnôt do času konečného stanovovania rezervy. Hodnoty týchto faktorov sa odhadujú obozretne s použitím matematicko-štatistických metód a na základe individuálnej skúsenosti jednotlivých poisťovní. Pri tejto metóde ale nemusí byť dosiahnutý súlad medzi vyplatenými a vzniknutými predikciami.

V prípade potreby sa tieto problémy často riešia použitím vhodných regresných metód na vyhladenie všetkých potrebných parametrov posledných vývojových rokov a ich extrapolovaním cez známe vývojové roky. Možno pritom použiť fakt, že (P/I) podiely obecné monotónne rastú od 0 do 1 a že parametre ρ a σ v posledných vývojových rokoch obecné loglineárne klesajú.

3.3 Aplikácia výpočtu na konkrétne dáta

V poslednej časti práce ukážeme aplikáciu oboch výpočtov, SCL i MCL metódy na reálne dáta. Použité dáta pochádzajú z odvetvia poistenia motorových vozidiel v období od roku 2002 do roku 2009 z portfólia poisťovne "ABC". Budeme uvažovať 32 období vzniku a 32 vývojových období. Časovým obdobím teda budú 3 mesiace. Najskôr uskutočníme jednotlivé výpočty tak ako sú popísané v teoretickej časti práce, potom ukážeme výpočet v praxi, ktorý spočíva v modifikácií vývojových faktorov. Samotný

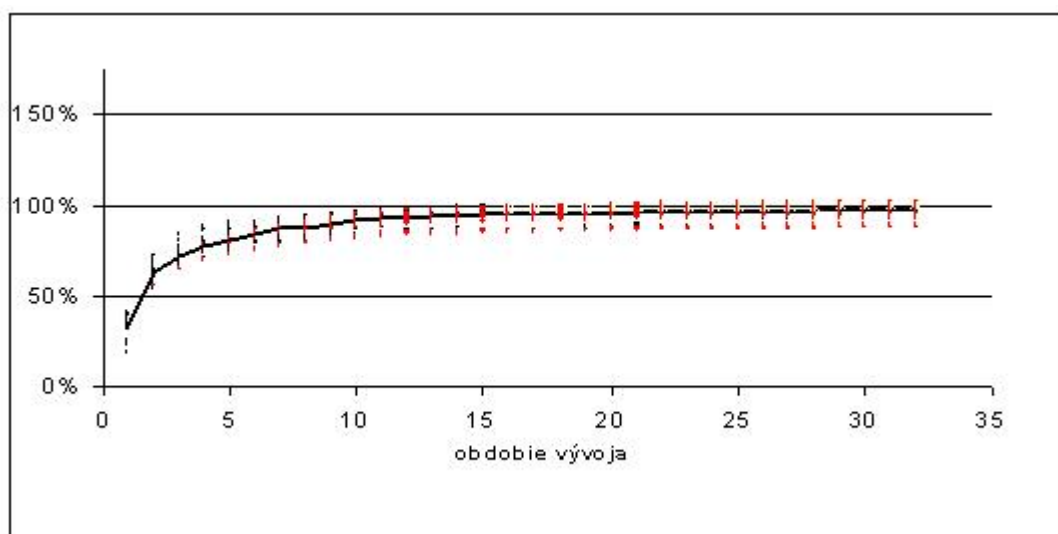
výpočet je modelovaný v excelovskom súbore, ktorý je prílohou tejto práce. Zameriame sa predovšetkým na výstupy modelu a zhodnotenie výsledkov. Najskôr uvedieme percentuálne hodnoty (P/I) podielov známych hodnôt.



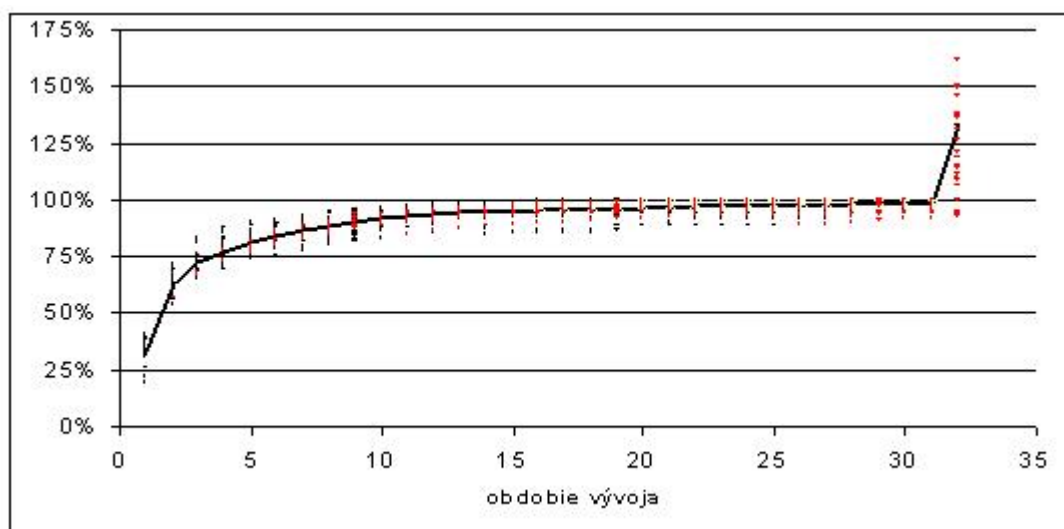
Obrázok 3.1: (P/I) podiely známych hodnôt

Je možné pozorovať, že približne od dvanásteho vývojového obdobia sa hodnoty približujú a zotrvávajú okolo hodnoty 100%. Možno teda konštatovať, že dáta vykazujú podobný trend správania sa ako dáta na obrázku 1.1, ktoré použili autori [7].

Po spočítaní potrebných parametrov, postupne doplníme trojuholníky na štvorce, najskôr SCL a následne MCL metódou. Spočítame podiely odhadovaných hodnôt a doplníme ich do grafu. Porovnáme odhadované podiely (zvýraznené červenou farbou) pre SCL a MCL metódu.

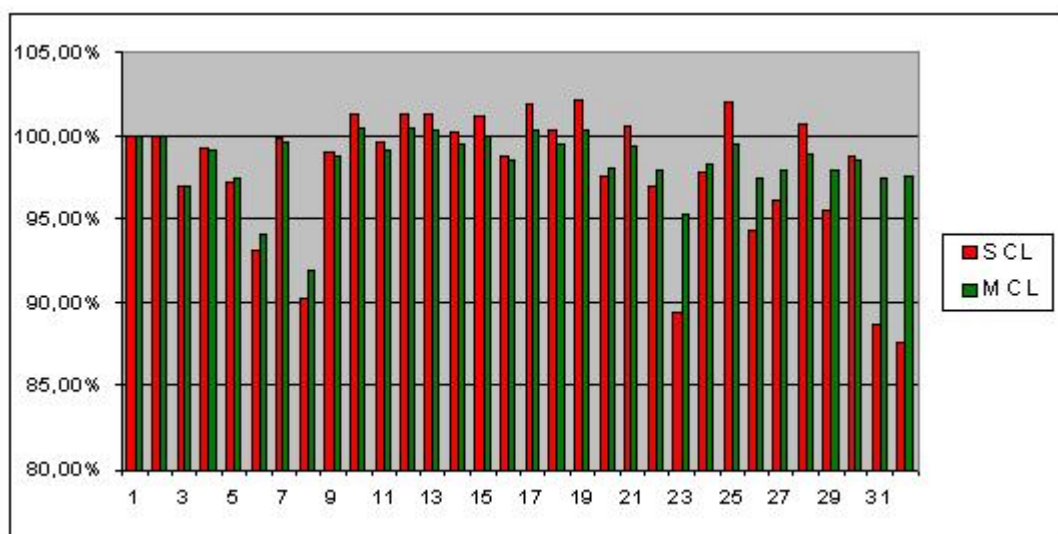


Obrázok 3.2: (P/I) podiely vrátane predpovedí - SCL

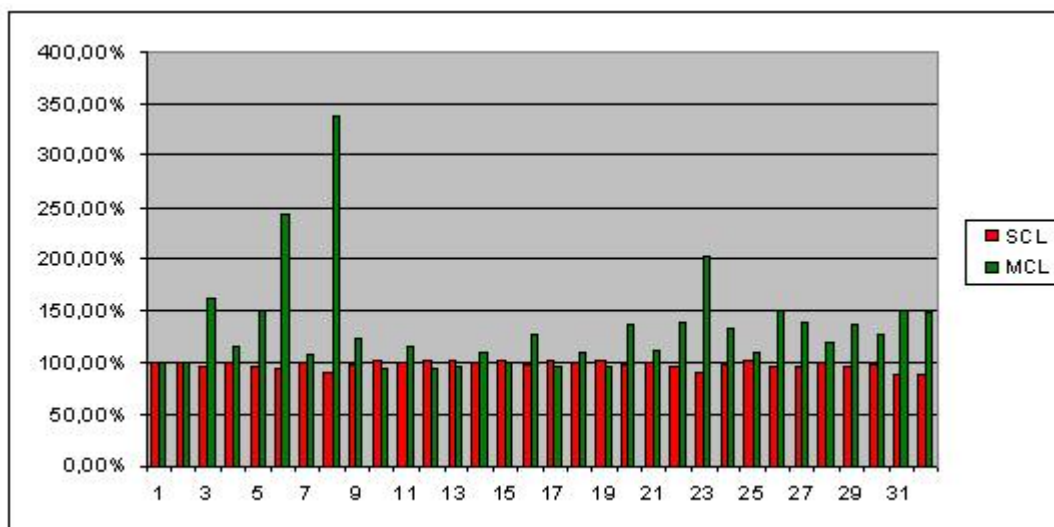


Obrázok 3.3: (P/I) podiely vrátane predpovedí - MCL

Z obrázkov je vidieť, že pri použití SCL metódy hodnoty nedosahujú tak výrazného rozptýlenia ako v prípade na obrázku 1.2, dokonca takmer nepresahujú hranicu 100%. Naopak pri MCL výpočte v poslednom vývojovom období možno pozorovať výrazne rozptýlenie podielov až ku hranici 150%. V prípade, že nebudeme uvažovať posledné vývojové obdobie, MCL dosahuje lepšie výsledky. Na obrázkoch 3.2 a 3.3 je však obtiažne pozorovať menšie rozdiely v hodnotách, ukážeme preto podrobnejšie (P/I) podiely pre posledný a predposledný vývojový rok a porovnáme metódy.



Obrázok 3.4: (P/I) podiely v percentách pre predposledné vývojové obdobie
- porovnanie SCL a MCL



Obrázok 3.5: (P/I) podiely v percentách pre posledné vývojové obdobie - porovnanie SCL a MCL

Je možné vidieť, že v predposlednom vývojovom období poskytuje MCL priaznivejšie výsledky ako SCL, v poslednom období sa však MCL zhoršuje, ako už bolo možné vidieť i z obrázku 3.3. Zhoršenie oproti predposlednému obdobiu je však extrémne. Pokúsime sa preto vysvetliť príčinu tak extrémneho skoku práve v posledných troch mesiacoch.

Uvažujme hypotézu, že tak výrazné rozptýlenie (P/I) podielov odhadnutých hodnôt pre posledné vývojové obdobie v MCL metóde vzniká v dôsledku použitých dát. Pre lepšiu názornosť sa zameriame na zadané dáta pre posledné vývojové obdobia:

Trojuholník vyplatených škôd (PAID)						Trojuholník vzniknutých škôd (INCURRED)					
	27	28	29	30	31		27	28	29	30	31
1	5 196 515	5 196 311	5 195 840	5 195 604	5 195 604	1	5 212 253	5 212 049	5 195 847	5 195 611	5 195 611
2	5 332 654	5 332 654	5 332 654	5 332 654		2	5 332 655	5 332 655	5 332 655	5 332 655	
3	6 152 590	6 236 440	6 240 443			3	6 412 961	6 411 546	6 438 320		
4	5 781 069	5 780 754				4	5 826 900	5 826 586			
5	6 621 555					5	6 834 144				

Obrázok 3.6: Konkrétne dáta pre jednotlivé trojuholníky

Možno si všimnúť, že rozdiel medzi súčtom vzniknutých škôd a súčtom vyplatených škôd pre tridsiate vývojové obdobie je minimálny. Rozdiely medzi jednotlivými hodnotami pre tridsiate vývojové obdobie sú tiež veľmi malé. Pri porovnaní s celkovými objemami škôd možno dokonca povedať, že rozdiely sú zanedbateľné. V dôsledku tak malých rozdielov medzi vzniknutými a vyplatenými škodami v tridsiatom vývojovom období možno následne pri výpočte odhadu parametru $\widehat{\rho}_{30}^I$ (viď 3.4), resp. parametru $\widehat{\rho}_{30}^P$ (viď 3.5) pozorovať, že jednotlivé sčítance $(I_{j,30} \cdot Q_{j,30} - \widehat{q}_{30})^2$, resp. $(P_{j,30} \cdot (Q_{j,30}^{-1} - \widehat{q}_{30}^{-1}))^2$ pre $j = 1, 2$ nadobúdajú veľmi nízke hodnoty. Pre porovnanie ukážeme jednotlivé sčítance i pre ostatné vývojové obdobia.

I*(P1-q_s)^2					P*(1/P-1/q_s)^2				
	27	28	29	30		27	28	29	30
1	1177,057	283,0062	706,5929	2,94E-06	1	1224,417	289,8543	723,3689	2,94E-06
2	1736,791	575,4792	725,3821	2,86E-06	2	1801,217	587,6246	742,6032	2,86E-06
3	3262,121	1836,109	2341,69		3	3526,299	1927,501	2473,299	
4	604,0237	37,07116			4	631,3962	38,15366		
5	1165,655				5	1247,707			

Obrázok 3.7: Jednotlivé sčítance $(I_{j,30} \cdot Q_{j,30} - \widehat{q}_{30})^2$, resp. $(P_{j,30} \cdot (Q_{j,30}^{-1} - \widehat{q}_{30}^{-1}))^2$

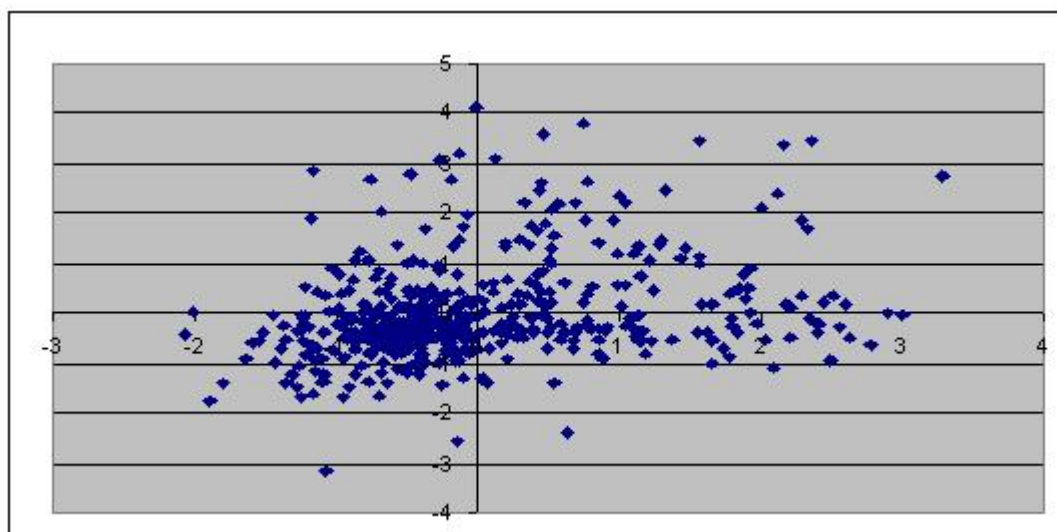
Je zrejmé, že hodnoty pre tridsiate vývojové obdobie sú niekoľkonásobne nižšie ako hodnoty pre predchádzajúce vývojové obdobia. Dôsledkom sú samozrejme i nízke hodnoty výsledných odhadovaných parametrov $\widehat{\rho}_{30}^I$, resp. $\widehat{\rho}_{30}^P$ ako je zrejmé z obrázku 3.8.

	27	28	29	30
$\hat{\rho}_i^I$	44,5692	30,1754	43,4377	0,00241
$\hat{\rho}_i^P$	45,9103	30,7849	44,3806	0,00241

Obrázok 3.8: Odhady parametrov $\hat{\rho}_s^I$, resp. $\hat{\rho}_s^P$ pre jednotlivé vývojové obdobia

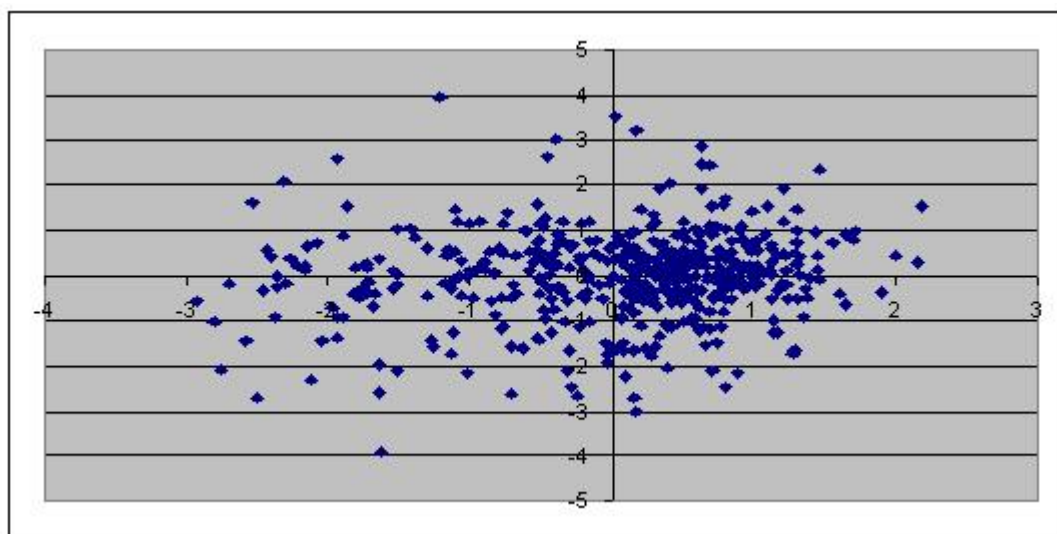
Bezprostredným dôsledkom takýchto hodnôt sú extrémne konečné odhady škôd v poslednom vývojovom období, ako je zrejmé z formúl 3.6 a 3.7.

Ďalej uvedieme reziduálne grafy pre MCL metódu.



Obrázok 3.9: Diagram vyplatených reziduí

Body grafu vykazujú korelačný koeficient 30,36% a regresná priamka prechádzajúca počiatkom má smernicu 0,31.



Obrázok 3.10: Diagram vzniknutých reziduí

Pre diagram vzniknutých reziduí korelácia vykazuje hodnotu 12,42% a parameter $\hat{\lambda}^P$ sme odhadli hodnotou 0,12.

V porovnaní s dátami na obrázkoch 1.6 a 1.7 sú súčasné hodnoty výrazne menej korelované.

Výsledná hodnota IBNR rezervy, spočítaná ako súčet rezerv (1.1) pre jednotlivé obdobia j , $j = 1, \dots, 32$ nadobúda záporných hodnôt. Pre SCL metódu dostávame hodnotu IBNR rezervy -12 232 910 a v prípade MCL metódy je výsledná hodnota rezervy rovná dokonca -55 775 652. Príčinou záporných hodnôt výsledných napočítaných rezerv je opäť špecifická vlastnosť použitých dát. V kumulatívnom trojuholníku vzniknutých škôd totiž dochádza k situáciám, že v nasledovných vývojových obdobiach sú hodnoty nižšie ako v predchádzajúcich vývojových obdobiach. Možnou príčinou špecifického správania sa dát môže byť skutočnosť, že výška nahlásených škôd je v danom vývojovom období nadhodnotená a v nasledujúcom období je nadhodnotenie odstránené. Dôsledkom sú hodnoty vývojových faktorov menšie než 1 a výsledná záporná rezerva.

V prípade, že by sme však namiesto formule (1.1) využili na výpočet IBNR rezervy formulu

$$\max(0; \widehat{X}_{j,n-1} - X_{j,n-j}), \quad j = 2, \dots, n = 32. \quad (3.15)$$

dostávame výsledné IBNR rezervy vo výške 4 567 602 pre SCL metódu a 388 231 pre MCL metódu.

Uvedieme ďalej porovnanie strednej kvadratickej chyby pre obe metódy. Z obrázku 3.11 je zrejmé, že stredná kvadratická chyba je mnohonásobne nižšia u MCL metódy než pri využití SCL metódy. Z toho je možné usudzovať, že MCL metóda je spoľahlivejšia než klasická SCL metóda.

Teraz ešte v krátkosti popíšeme výsledky upraveného modelu pre použitie v praxi. Úprava spočívala v "pridaní" dodatočného stĺpca "ultimate claims", ktorý navýšil odhady pre posledné vývojové obdobie o 1%. Došlo tiež k modifikácií vývojových faktorov. Praktický výpočet je počítaný odborníkmi v danej oblasti a preto je upravovaný na základe ich odborných znalostí a skúseností. Aktuár podrobne sleduje zmeny jednotlivých vývojových faktorov s pribúdajúcimi obdobiami a v prípade, že dochádza k výraznému odchýleniu od predchádzajúcich hodnôt vývojový faktor následne upraví (napríklad zanedbaním extrémnych dát trojuholníka). Pri väčšom množstve použitých dát napríklad dochádza k znižovaniu váhy starších dát pri porovnaní s dátami zo súčasných období vzniku.

V našom modeli sme sa pokúsili nasimulovať praktický výpočet. Spočítali sme niekoľko vývojových faktorov - bez zahrnutia 1. roku vzniku, 2. roku vzniku atď. až bez zahrnutia 7. roku vzniku, tj. sme znížili váhu hodnotám z počiatočných rokov vzniku. Následne sme získané hodnoty spriemerovali a upravili použitím zásady opatrnosti tj. odhady vývojových faktorov pre vzniknuté škody sme mierne navýšili a odhadý vývojových faktorov pre škody vyplatené sme mierne znížili.

Aplikáciou praktického výpočtu sme získali nasledovné hodnoty pre finálne odhady IBNR rezervy: Využitím formule (1.1) dostávame hodnotu IBNR rezervy vo výške 18 266 324 pre SCL metódu a -104 232 606 pre MCL metódu a aplikáciou (3.15) dostávame nezmenenú hodnotu pre SCL metódu a pre MCL metódu dostávame hodnotu 3 418 436. Je evidentné, že pre MCL metódu vychádza praktický výpočet horšie než výpočet pôvodný, dochádza i k výraznému zníženiu korelácie v reziduálnych grafoch. Odhad parametru $\widehat{\lambda}^P$ vychádza 0,18 a $\widehat{\lambda}^I$ dosahuje hodnotu 0,03.

rok vzniku	diagonála	SCL				MCL			
		odhad	rezerva	MSE*0,5	MSE %	odhad	rezerva	MSE*0,5	MSE %
1	5 195 604	5 195 604	0			5 195 604	0		
2	5 332 654	5 332 654	0			5 332 605	0		
3	6 240 443	6 240 303	0			8 749 253	2 508 810	85	0,003401%
4	5 780 754	5 781 842	1 088	2 711	249,2%	6 402 419	621 665	21	0,003456%
5	6 621 555	6 647 370	25 815	48 908	189,5%	8 880 778	2 259 223	74	0,003297%
6	6 497 968	6 525 160	27 193	48 627	178,8%	11 774 953	5 276 986	175	0,003315%
7	6 912 424	6 940 713	28 289	50 514	178,6%	7 283 781	371 358	12	0,003178%
8	8 237 213	8 274 623	37 411	58 087	155,3%	17 778 595	9 541 382	301	0,003152%
9	7 046 697	7 081 201	34 504	53 282	154,4%	8 153 282	1 106 585	36	0,003226%
10	7 903 267	7 951 383	48 116	60 908	126,6%	7 496 797	0		
11	9 521 385	9 577 240	55 855	68 464	122,6%	10 619 333	1 097 948	33	0,003018%
12	8 358 601	8 407 064	48 463	63 171	130,3%	7 983 575	0		
13	11 425 973	11 491 955	65 982	87 023	131,9%	11 008 753	0		
14	11 933 088	12 013 793	80 705	96 897	120,1%	12 818 985	885 897	26	0,002887%
15	11 601 712	11 692 704	90 992	104 423	114,8%	11 620 990	19 278	1	0,005494%
16	12 141 524	12 246 603	105 079	111 262	105,9%	14 550 152	2 408 628	69	0,002882%
17	10 029 179	10 126 816	97 637	101 816	104,3%	9 655 819	0		
18	10 354 763	10 486 010	131 247	122 387	93,2%	11 237 831	883 068	25	0,002800%
19	10 483 118	10 635 259	152 140	135 435	89,0%	10 143 214	0		
20	12 589 447	12 810 912	221 465	158 203	71,4%	16 052 743	3 463 296	95	0,002752%
21	11 819 374	12 049 820	230 447	157 126	68,2%	13 005 420	1 186 047	31	0,002610%
22	11 707 125	11 962 233	255 108	159 338	62,5%	15 204 074	3 496 949	96	0,002732%
23	16 568 794	17 030 655	461 862	225 629	48,9%	28 443 069	11 874 275	309	0,002605%
24	17 673 301	18 328 814	655 513	255 233	38,9%	22 467 627	4 794 326	116	0,002423%
25	19 812 491	20 844 614	1 032 123	332 038	32,2%	21 948 510	2 136 018	39	0,001828%
26	19 224 226	20 456 381	1 232 155	338 817	27,5%	27 873 222	8 648 997	198	0,002285%
27	19 909 864	21 572 310	1 662 447	388 960	23,4%	27 544 630	7 634 767	161	0,002103%
28	24 110 211	26 877 015	2 766 804	516 474	18,7%	30 227 987	6 117 776	100	0,001631%
29	20 649 255	24 076 589	3 427 334	587 260	17,1%	30 822 896	10 173 641	176	0,001734%
30	23 875 424	29 979 258	6 103 833	771 655	12,6%	35 644 537	11 769 113	156	0,001324%
31	22 672 974	33 753 009	11 080 034	1 205 749	10,9%	47 892 258	25 219 283	325	0,001288%
32	9 300 998	32 305 370	23 004 372	3 046 226	13,2%	45 749 349	36 448 351	356	0,000978%

Obrázok 3.11: Porovnanie MSE

Záver

Cieľom práce bolo predstaviť Mníchovskú chain ladder metódu - metódu na odhad IBNR rezervy v neživotnom poistení. Vychádzali sme z klasickej chain ladder metódy, najpoužívanejšej metódy, ktorú sme predstavili v prvej kapitole. Uviedli sme princíp výpočtu a popísali najzásadnejšie problémy, ktorými je zaťažená. V snahe riešiť systematickú chybu SCL metódy bola navrhnutá MCL metóda, ktorá ponúka riešenie.

MCL metóda uvažuje korelácie medzi vzniknutými a vyplatenými škodami, čím eliminuje systematickú chybu SCL metódy prameniáciu z individuálneho výpočtu. MCL metódu sme popísali v druhej časti práce. Uviedli sme predpoklady modelu a následne sme vysvetlili princíp výpočtu.

Predmetom poslednej kapitoly boli odhady parametrov jednotlivých metód a praktický výpočet rezervy s využitím reálnych dát. Výsledky výpočtu však nezodpovedali vyloženej teórii. Odhady IBNR rezervy s využitím MCL výpočtu vychádzali podstatne horšie ako výsledky SCL metódy. Zrejmosťou príčinou boli špecifické dáta, ktoré vykazovali "netypické" vlastnosti predovšetkým v posledných obdobiach vývoja. Podstata netypickej vlastnosti bola popísaná v tretej kapitole práce, spočívala v minimálnom rozdiel medzi vzniknutými a vyplatenými škodami v predposlednom vývojovom roku. Dôsledkom boli výrazne navýšené finálne odhady MCL metódy pre posledný rok vzniku. Ak by sme však uvažovali hodnoty v predposlednom vývojovom roku, MCL metóda nám poskytla lepšie odhady než SCL metóda. Grafické porovnanie spomínaných hodnôt je uvedené v tretej kapitole.

U oboch metód sme uviedli a spočítali strednú štvorcovú chybu výpočtu, ktorá je vhodným porovnávacím prostriedkom. Výrazne nižšiu hodnotu MSE sme dostali pri využití MCL výpočtu, čo je dôkazom vyššej spoľahlivosti metódy.

Na použitých dátach sme sa pokúsili nasimulovať i "reálny výpočet"

počítaný v praxi. Simulovali sme úpravy vývojových faktorov, tak ako k nim pristupujú odborníci v danej oblasti - aktuári. SCL metóda nám pri takomto alternatívnom postupe poskytla lešie výsledky ako při štandardnom výpočte, MCL metóda naopak vykazála horšie výsledky.

Všeobecne možno zhodnotiť, že MCL metóda úspešne eliminuje chybu SCL metódy, je založená na sofistikovanejšom a teda i zložitejšom princípe. Na praktickom výpočte sme však ukázali, že i MCL metóda má slabé stránky. Rozhodnutie, či zvoliť nenáročnú, ale chybou zaťaženú SCL metódu alebo využiť presnejšiu, ale výpočetne mnohonásobne zložitejšiu MCL metódu je na jednotlivých poisťovniach a ich skúsenostiach.

Literatúra

- [1] Anděl, J.: *Stochastické metody*, Matfyzpress, 1998.
- [2] Jedlička, P.: *Stochastické modelování v neživotním pojištění*, 2009.
- [3] Jedlička P., Kočvara J., Strnad J.: *Techniky výpočtu IBNR a jejich aplikace v pojištění odpovědnosti z provozu vozidla*, Seminár z aktuárských vied, MFF UK, Praha, 2004.
- [4] Mack, T.: *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, Astin Bulletin, 1993.
- [5] Mandl, P., Mazurová, L.: *Matematické základy neživotního pojištění*, Matfyzpress, Praha, 1999.
- [6] Prášková, Z., Lachout, P.: *Základy náhodných procesů*, Karolinum, Praha, 2001.
- [7] Quarg, G., Mack, T.: *A reserving method that reduces the gap between IBNR projections based on paid losses and IBNR projections based on incurred losses*, Germany, 2004, 597–630.